

Trabajo Fin de Grado en
Ingeniería de las Tecnologías Industriales

Análisis modal experimental en un vehículo de
competición

Autor: Rafael Prieto Álamos

Tutor: Daniel García Vallejo

Dep. Ingeniería Mecánica
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2018



Proyecto Fin de Grado de
Ingeniería de Tecnologías Industriales

Análisis modal experimental en un vehículo de competición

Autor:

Rafael Prieto Álamos

Tutor:

Daniel García Vallejo

Profesor titular

Dep. de Ingeniería Mecánica

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2018

Proyecto Fin de Carrera: Análisis modal experimental en un vehículo de competición

Autor: Rafael Prieto Álamos

Tutor: Daniel García Vallejo

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2018

El Secretario del Tribunal

A todo aquel que sabe que lo merece.

AGRADECIMIENTOS

Tras cuatro intensos años de esfuerzo y sacrificio son muchas las personas con las que estoy en deuda por haberme facilitado o, por el contrario, por no haberle facilitado yo uno de los más preciados recursos con los que cuenta un ser humano, el tiempo. Es por esto por lo que agradezco enormemente a mi familia y amigos la paciencia y tesón con el que han soportado el transcurso de esta andadura estudiantil. No estaría escribiendo estas palabras si no fuese por el apoyo que me brindan día tras día. De igual forma han sido muchos los profesores que, además de la formación académica, me han guiado para llegar a ser un gran ingeniero. Espero que así sea. A todos vosotros, gracias.

Así también he de agradecer al ARUS Andalucía Racing Team por confiarme su monoplaça para la realización de estos ensayos, con la responsabilidad que esto conlleva, al igual que la ayuda proporcionada para la realización de los mismos.

Rafael Prieto Álamos

Sevilla, 2018

RESUMEN

En el presente documento se aborda el análisis modal experimental de un vehículo de competición. Más concretamente del ART-17 del ARUS Andalucía Racing Team, participante en la competición internacional Formula Student. Para esto fue necesario realizar unos ensayos en los cuales se excitó el monoplaça y se registraron las aceleraciones desde distintos puntos de este para someterla a estudio.

Para llevar a cabo los test fue necesario el diseño de unos elementos que permitirían la realización de los ensayos en el banco de ensayos con el que se contaba. Se detalla todo el proceso de diseño, así como el montaje de estos en el laboratorio. De igual forma se incluye el proceso de fabricación de uno de los circuitos de conexión de los acelerómetros que se instalaron en el vehículo.

Finalmente se detalla todo el postproceso de la información registrada y se realiza el análisis modal experimental de dos modelos teóricos adaptados y de los datos tomados en los test. Como se comenta en los apartados oportunos, estos no son los objetivos iniciales del proyecto, pero una serie de inconvenientes provocan que estos deban ser modificado adaptándose a lo anteriormente citado.

ABSTRACT

This document deals with the experimental modal analysis of a competition vehicle. More specifically the ART-17 by ARUS Andalucía Racing Team, one of the participants in the international Formula Student competition. To do this it is necessary to develop some tests in which the single-seating was excited and some accelerometer recorder the accelerations from different points of them for its study.

To achieve this it was necessary to design some elements that would allow to do the trials in the test bench that we have. The complete design process is detailed below, as well as the assembly of these in the laboratory. By the same token, the manufacturing process of one of the connection circuits of the accelerometers that were installed in the vehicle is included.

Finally, all the post-processing of the recorded data is explained accompanied by the experimental modal analysis of two adapted theoretical models and the data taken in the tests. As it is said in the appropriate sections, these are not the initial objectives of this project but a combination of issues have caused that these must be modified, changing to the previously mentioned.

ÍNDICE

Agradecimientos	IX
Resumen	XI
Abstract	XIII
Índice	XV
Índice de Tablas	XVII
Índice de Figuras	XIX
Notación	XXIII
1 Introducción	1
1.1 <i>Reseña histórica</i>	1
1.2 <i>Introducción al Análisis Modal</i>	1
1.3 <i>Motivación y objetivos</i>	2
1.4 <i>Acelerómetros</i>	3
2 Diseño del Utillaje	5
2.1 <i>Máquina de ensayos:</i>	5
2.1.1 Descripción del banco de ensayos	5
2.2 <i>Diseño de los apoyos</i>	6
2.2.1 Ensayo con MEF	7
2.3 <i>Diseño de la base del actuador</i>	10
2.3.1 Ensayo con MEF	11
3 Montaje	13
3.1 <i>Esquema del montaje</i>	13
3.2 <i>Montaje completo</i>	15
4 Sistema de Captación	19
4.1 <i>Preparación de la instalación</i>	19
4.2 <i>Colocación del sistema en el vehículo</i>	22
5 Datos Obtenidos	27
5.1 <i>Ensayos</i>	27
5.2 <i>Captación de los datos</i>	28
5.3 <i>Postproceso</i>	29
5.4 <i>Diferencia entre acelerómetros</i>	29
6 Análisis Modal Experimental	43
6.1 <i>Introducción al Análisis Modal</i>	43
6.1.1 Análisis modal teórico	43
6.1.2 Análisis modal experimental	43
6.2 <i>Método de Ibrahim (ITD)</i>	44
6.2.1 Procedimiento	44
6.2.2 Factor de Confianza Modal (MCF)	46
6.3 <i>Aplicación del método en modelos analíticos</i>	47
6.3.1 Sistema 3 gdl	47
6.3.2 Sistema 7 gdl	57

6.4	<i>Aplicación del método a los datos del ensayo</i>	70
6.4.1	Análisis de resultados.....	73
7	Conclusiones	75
7.1	<i>Conclusiones</i>	75
8	Referencias	77
9	Anexo	79
9.1	<i>Planos</i>	79
9.1.1	Apoyo	80
9.1.2	Base del Actuador	81

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 5-1. Frecuencias naturales amortiguadas aproximadas con FRF.	41
Tabla 6-1. Autovalores Sist. 3 gdl en desplazamiento sin ruido.	51
Tabla 6-2. Autovalores Sist. 3 gdl en desplazamiento con ruido.	53
Tabla 6-3. MCF del 1º autovalor, sist. 3 gdl, desplaz. con ruido.	54
Tabla 6-4. MCF del 2º autovalor, sist. 3 gdl, desplaz. con ruido.	54
Tabla 6-5. Autovalores Sist. 3 gdl en desplazamiento con ruido y otras c.i.	54
Tabla 6-6. MCF del 2º autovalor, sist. 3 gdl, desplaz. con ruido y otras c.i.	55
Tabla 6-7. Modo 2 Sist. 3 gdl en desplazamiento con ruido y otras c.i.	55
Tabla 6-8. Autovalores Sist. 3 gdl en aceleración con ruido.	56
Tabla 6-9. MCF del 2º autovalor, sist. 3 gdl, acel. con ruido.	56
Tabla 6-10. MCF del 3º autovalor, sist. 3 gdl, acel. con ruido.	57
Tabla 6-11. Modo 2 Sist. 3 gdl en aceleración con ruido.	57
Tabla 6-12. Modo 3 Sist. 3 gdl en aceleración con ruido.	57
Tabla 6-13. Modos Sist. 7 gdl.	62
Tabla 6-14. Modos en forma exponencial Sist. 7 gdl.	62
Tabla 6-15. Autovalores Sist. 7 gdl en aceleración con ruido.	64
Tabla 6-16. MCFs sist. 7 gdl, acel. con ruido.	64
Tabla 6-17. Modo 5 Sist. 7 gdl en aceleración con ruido.	65
Tabla 6-18. Modo 7 Sist. 7 gdl en aceleración con ruido.	65
Tabla 6-19. Autovalores Sist. 7 gdl en aceleración con ruido filtrado.	68
Tabla 6-20. Modo 5 Sist. 7 gdl en aceleración con ruido filtrado.	68
Tabla 6-21. Modo 7 Sist. 7 gdl en aceleración con ruido.	69
Tabla 6-22. Resultados finales sist. 7 gdl.	69
Tabla 6-23. Resultados finales ART-17.	72
Tabla 6-24. Resultados finales ART-17 en forma exponencial.	72

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1. ART 17 [3].	2	
Figura 2.1. Banco de ensayo.	5	
Figura 2.2. Elementos auxiliares.	6	
Figura 2.3. Modelo 3D del apoyo.	7	
Figura 2.4. Puntos sometidos a mayores tensiones (ensayo 1).	8	
Figura 2.5. Puntos sometidos a mayores tensiones (ensayo 1) (Detalle).	8	
Figura 2.6. Puntos sometidos a mayores tensiones (ensayo 2).	9	
Figura 2.7. Puntos sometidos a mayores tensiones (Detalle) (ensayo 2).	9	
Figura 2.8. Base para actuador.	10	
Figura 2.9. Pieza de unión entre el actuador y la base.	10	
Figura 2.10. Puntos sometidos a mayores tensiones en la base del actuador.	11	
Figura 2.11. Puntos sometidos a mayores tensiones en la base del actuador (Detalle).	11	
Figura 3.1. Esquema de la colocación de los tornillos en las guías.	13	
Figura 3.2. Esquema 3D de un apoyo colocado.	14	
Figura 3.3. Montaje del actuador.	14	
Figura 3.4. Montaje del actuador (Detalle).	15	
Figura 3.5. Montaje completo.	15	
Figura 3.6. Montaje real para el ensayo.	16	
Figura 3.7. Montaje real para el ensayo (2).	16	
Figura 3.8. Rueda con actuador	Figura 3.9. Rueda con apoyo.	17
Figura 3.10. Detalle anclaje de apoyos y actuador.	17	
Figura 4.1. Perforación de las placas de circuito impreso.	19	
Figura 4.2. Placa de acelerómetro económico soldada.	20	
Figura 4.3. Esquema de pines de la Mbed [6].	21	
Figura 4.4. Cable de seis filamentos.	21	
Figura 4.5. Protoboard con todas las conexiones y el microcontrolador.	22	
Figura 4.6. Esquema del posicionamiento de los acelerómetros.	22	
Figura 4.7. Acelerómetros de las ruedas traseras.	23	
Figura 4.8. Acelerómetros de las ruedas delanteras (por la cara interna).	23	
Figura 4.9. Acelerómetro del chasis (zona del asiento del piloto).	23	
Figura 4.10. Acel. de bajo coste en ruedas delanteras.	24	

Figura 4.11. Acel. de bajo coste en ruedas traseras (parte interna).	24
Figura 5.1. Fragmento de un registro en vibración libre.	27
Figura 5.2. Vibración forzada acelerómetro 1 a 2.5 Hz.	28
Figura 5.3. Fragmento de un registro de vibración libre con duplicación de datos.	29
Figura 5.4. Vibración forzada, 1 Hz, acelerómetro 3.	30
Figura 5.5. Vibración forzada, 2.5 Hz, acelerómetro 3.	30
Figura 5.6. Vibración forzada, 5 Hz, acelerómetro 3.	30
Figura 5.7. Vibración forzada, 7.5 Hz, acelerómetro 3.	31
Figura 5.8. Vibración forzada, 10 Hz, acelerómetro 3.	31
Figura 5.9. Vibración forzada, 16 Hz, acelerómetro 3.	31
Figura 5.10. Vibración forzada, 20 Hz, acelerómetro 3.	32
Figura 5.11. Vibración forzada, 25 Hz, acelerómetro 3.	32
Figura 5.12. Vibración forzada, 2.5 Hz, acelerómetro 2.	33
Figura 5.13. Vibración forzada, 5 Hz, acelerómetro 2.	33
Figura 5.14. Vibración forzada, 10 Hz, acelerómetro 4.	34
Figura 5.15. Vibración forzada, 20 Hz, acelerómetro 2.	34
Figura 5.16. Vibración forzada, 25 Hz, acelerómetro 4.	34
Figura 5.17. FRF de la posición 2.	35
Figura 5.18. FRF de la posición 3.	35
Figura 5.19. FRF de la posición 4.	35
Figura 5.20. FRF de la posición 5.	36
Figura 5.21. FRF de la posición 1, acel. alta calidad.	36
Figura 5.22. FRF económicas normalizadas con máximos=1, superpuestas.	37
Figura 5.23. FRF alta calidad normalizadas con máximos=1, superpuestas.	37
Figura 5.24. Vibración libre del acel. 3.	38
Figura 5.25. Detalle de la Figura 5.24.	38
Figura 5.26. FRF Libre 1 mm, Acel. 3.	39
Figura 5.27. FRF Libre 2 mm, Acel. 4.	39
Figura 5.28. FRF Libre 3 mm, Acel. 1.	39
Figura 5.29. FRF de Vib. Libre acel. 1.	40
Figura 5.30. FRF de Vib. Libre acel. 2.	40
Figura 5.31. FRF de Vib. Libre acel. 3.	40
Figura 5.32. FRF de Vib. Libre acel. 4.	41
Figura 5.33. FRF de Vib. Libre acel. 5.	41
Figura 6.1. Sistema de masas con 3 gdl [7].	47
Figura 6.2. Respuesta en desplazamiento del sistema de 3 gdl.	49
Figura 6.3. Respuesta en desplazamiento del sistema de 3 gdl con ruido.	49
Figura 6.4. Respuesta en aceleración del sistema de 3 gdl.	49
Figura 6.5. Respuesta en aceleración del sistema de 3 gdl con ruido.	50

Figura 6.6. Barrido para Δt en desplazamiento sin ruido.	50
Figura 6.7. Barrido para $\Delta \tau$ en desplazamiento sin ruido.	51
Figura 6.8. Barrido para $\Delta \tau$ en desplazamiento sin ruido.	51
Figura 6.9. Barrido para Δt en desplazamiento con ruido.	52
Figura 6.10. Barrido para $\Delta \tau$ en desplazamiento con ruido.	53
Figura 6.11. Barrido para $\Delta \tau^2$ en desplazamiento con ruido.	53
Figura 6.12. Modelo de un vehículo (7 gdl).	58
Figura 6.13. Esquema de simplificación de desplazamientos.	58
Figura 6.14. Desplazamientos Modelo Coche 7 gdl.	60
Figura 6.15. Aceleraciones Modelo Coche 7 gdl.	61
Figura 6.16. Aceleraciones Modelo Coche 7 gdl (Detalle componentes de pequeña amplitud).	61
Figura 6.17. Detalle aceleraciones (m/s^2) Modelo Coche 7 gdl con ruido.	66
Figura 6.18. Detalle aceleraciones (m/s^2) Modelo Coche 7 gdl con ruido filtrado.	66
Figura 6.19. Barrido del MCF en $\Delta \tau$ sin filtrar.	67
Figura 6.20. Barrido del MCF en $\Delta \tau$ filtrado.	67
Figura 6.21. Aceleraciones del ART-17 filtradas con $A=3$ mm.	71
Figura 6.22. Barrido de frecuencias para $\Delta \tau$	71
Figura 6.23. Barrido del MCF en $\Delta \tau$	71

NOTACIÓN

A^*	Conjugado
e	Número e
sen	Función seno
Cos	Función coseno
tg	Función tangente
MEF	Método de los Elementos Finitos
FRF	Función de Respuesta en Frecuencia
ITD	Ibrahim Time Domain Method
MCF	Modal Confidence Factor
gdl	Grado(s) de libertad
c.d.g.	Centro de gravedad
g	Gravedad
p	Número de estaciones
N	Número de gdl
\mathbb{R}^{2N}	Espacio vectorial de tamaño $2N$
\mathbf{m}	Matriz de masa
\mathbf{k}	Matriz de rigidez
\mathbf{c}	Matriz de amortiguamiento
I_α	Momento de inercia con giro α
I_β	Momento de inercia con giro β
ϵ	Pertenece a
\mathbf{x}	Matriz del historial de desplazamientos
\mathbf{x}	Vector de coordenadas normales N
\mathbf{y}	Vector de coordenadas modales $2N$
$\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}$	Primera y segunda derivada temporal

A	Matriz cuadrada del método de superposición modal tamaño $2N$
B	Matriz cuadrada del método de superposición modal tamaño $2N$
λ	Autovalor
ψ	Autovector
α	Ángulo de alabeo o roll del modelo de 7 gdl
β	Ángulo de cabeceo o pitch del modelo de 7 gdl
z	Desplazamiento vertical del c.d.g. del modelo de 7 gdl
x_{si}	Desp. vertical de la masa semisuspendida de la rueda i
x_i	Desp. vertical de la esquina i del chasis del modelo de 7 gdl
q	Vector de coordenadas generalizadas.
h	Paso temporal de captación de datos
s	Número de registros de tiempo tomados para el ITD
Δt	Desplazamiento temporal para la aplicación del ITD
$\Delta \tau$	Desplazamiento temporal para duplicar p (ITD)
$\Delta \tau_2$	Desplazamiento temporal para triplicar p (ITD)
$x(t)$	Vector de respuesta en vibración libre en t (ITD)
$x'(t)$	Vector de respuesta en vibración libre en $t + \Delta \tau$ (ITD)
$X, X_{\Delta t}, X_{2\Delta t}$	Matrices de respuesta en vibración libre (ITD) $N \times s$
$\overline{\{\}}$	Matriz con retraso Δt (ITD)
$\overline{\overline{\{\}}}$	Matriz con retraso $2\Delta t$ (ITD)
$Z, \bar{Z}, \bar{\bar{Z}}$	Matrices del ITD $N \times 2N$
Λ	Matriz de exponenciales (ITD) $2N \times 2N$
$\chi, \bar{\chi}$	Matrices de respuesta en vibración libre (ITD) $2N \times s$
$\Theta, \bar{\Theta}$	Matrices del problema de autovalores y autovectores $2N \times 2N$ (ITD)
$\theta_r, \bar{\theta}_r$	Columna r de las matrices Θ y $\bar{\Theta}$ (ITD)
$z_{expected}$	Vector del modo esperado para el MCF
ω	Frecuencia natural, módulo del autovalor
ω_d	Parte imaginaria del autovalor, frecuencia natural amortiguada
σ	Parte real del autovalor

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Reseña histórica

Existen evidencias de las primeras estructuras artificiales que datan de hace miles de años (13 000 a.C.). A lo largo del tiempo estas estructuras han evolucionado a la vez que lo hacía el propio ser humano, dando cobertura a las necesidades de cada momento de la historia. Comenzando con pequeñas cabañas construidas con palos de madera y pieles, hasta los rascacielos y puentes de la actualidad.

Conforme iba aumentando la complejidad de estas estructuras además de realizar funciones de mayor importancia, fue necesario conocer de qué forma se iban a comportar en ciertas situaciones. La forma en la que el viento excita un edificio, el perfil de una carretera bajo las ruedas de un vehículo, incluso el ritmo con el que caminan las personas sobre un puente, pueden acarrear situaciones críticas para esas estructuras.

Una de las situaciones más crítica que puede darse en una estructura es su excitación con unas fuerzas cuya intermitencia se produzca a una frecuencia de valor cercano a alguna de las frecuencias características (naturales) del sistema. Estas frecuencias provocan un aumento desproporcionado de las amplitudes de vibración del sistema, entrando en resonancia y consiguiendo unos desplazamientos que pueden llevar incluso al colapso de la estructura si esta no cuenta con los elementos de amortiguamiento adecuados. Para evitar estas situaciones, la gran mayoría de los ejércitos rompen su paso cuando atraviesen puentes o viaductos. La frecuencia del paso de los soldados puede excitar el puente en un rango de frecuencias próximo a una de sus frecuencias naturales.

Un claro ejemplo de una situación imprevista obligó a cerrar el Millenium Bridge de Londres dos días después de su inauguración. Un excesivo tránsito de personas sobre su tablero y una coordinación azarosa del ritmo al que caminaban provocó que el puente oscilase horizontalmente de manera considerable. De tal forma, estas oscilaciones incitaron una coordinación todavía mayor de la forma de caminar de los viandantes, lo que aumentó la amplitud de las oscilaciones. Afortunadamente este puente no llegó a colapsar por esta excitación, pero debió ser remodelado para aumentar el amortiguamiento de sus componentes y reducir la posibilidad de que volviese a ocurrir.

Por todo esto, conocer las características que rigen el comportamiento de las estructuras se ha convertido en un requisito indispensable a la hora de realizar diseños y construcciones. Para obtener estas características dinámicas en estructuras de gran complejidad que ya ha sido construidas, de sistemas de los cuales no pueden realizarse un modelo analítico o de modelos a escala de estas, puede hacerse uso del análisis modal experimental.

1.2 Introducción al Análisis Modal

Para ubicar la necesidad de realización de este análisis cabe comenzar definiendo qué es el análisis modal. Un análisis modal es un tipo de análisis a partir del cual se pueden conseguir las características que describen el comportamiento dinámico de un sistema. Con estas se puede llegar a definir el modelo dinámico lineal de la estructura. Los parámetros modales que se analizan generalmente son: las frecuencias de resonancia, la amortiguación y el patrón de vibración o forma modal de la resonancia (modos de vibración) [1].

Una vez conocidos estos parámetros, cabe la posibilidad de simular el comportamiento de nuestra estructura ante una excitación vibratoria que, predeciblemente, pueda sufrir durante su vida útil y analizar la respuesta. Esta es la utilidad principal de este tipo de análisis. Por otro lado, también es posible realizar modificaciones en el

modelo matemático para adecuar la respuesta del sistema y posteriormente extrapolar estas modificaciones a la realidad para conseguir un comportamiento determinado. Entre las aplicaciones más comunes del análisis modal se encuentran:

- Solución de problemas de ruido y vibración: Si tras las mediciones se descubre que las condiciones de operación son capaces de estimular la estructura hasta la resonancia, se podrán realizar modificaciones del modelo.
- Monitorización estructural: Se puede monitorizar el estado de un sistema y detectar imperfecciones o defectos (creación de grietas, etc.) mediante sus parámetros modales.
- Verificar modelos analíticos: modelos (por MEF generalmente) que sean utilizados en etapas iniciales de diseño pueden ser usados para simulación y optimización. Posteriormente se podrá verificar que el prototipo creado se asemeja al modelo teórico y mejorarlo en su defecto.

La forma más extendida de excitación para el análisis modal experimental consiste en el uso de un mazo o martillo con el cual se impacta sobre la estructura. Este impacto debe ser preciso e instantáneo para conseguir unos resultados óptimos (El material de la punta de este será un aspecto clave). Por otro lado, también puede estudiarse el comportamiento modal de un equipo cuando este se encuentra en funcionamiento y excitado por las vibraciones que crean sus propios componentes. Este tipo de ensayos se realizan tanto en compresores y máquinas de pequeño tamaño hasta el gran Airbus Beluga XL, el avión de carga más grande diseñado hasta el momento. Por último, la técnica que se ha utilizado en los ensayos que se describen abajo corresponde con la aplicación de un escalón, eliminando repentinamente una masa adherida al sistema o mediante un desplazamiento brusco de uno de los apoyos de este [2].

1.3 Motivación y objetivos

El objetivo inicial de este proyecto es la obtención de los parámetros modales que rigen el comportamiento dinámico de un monoplaza de competición (Formula Student) mediante análisis modal experimental.

Poniéndonos en situación, se dispone de un monoplaza diseñado por el *ARUS Andalucía Racing Team* con el cual representan a la universidad de Sevilla, Andalucía y España en la competición automovilística universitaria de mayor interés en el mundo, la Formula Student. Este equipo se encarga del diseño y fabricación del vehículo, así como de posibilitar su participación en las pruebas que componen la competición en la que se enfrentan a algunas de las universidades más prestigiosas del planeta. Esta temporada se ha propuesto al equipo la realización de un análisis modal experimental en el monoplaza ART-17 (el utilizado en la temporada anterior) de manera que pudiesen utilizar toda la información obtenida en este proyecto de cara a futuras modificaciones para los diseños de los próximos años.



Figura 1.1. ART 17 [3].

Con la realización de este estudio se pretenden obtener las características dinámicas que posee el monoplaza y

posteriormente adecuar un modelo matemático lineal del mismo para conseguir una respuesta similar a la obtenida en la experimentación.

El método que se usará para el análisis modal experimental será el método de Ibrahim junto con análisis de la función de respuesta en frecuencia de los datos. Para esto será necesario adecuar las instalaciones de manera que se posibilite la realización de los ensayos. En esto consiste el primer apartado que se encuentra a continuación, el diseño de los apoyos que nos permitirán la colocación del coche en el banco de ensayos.

Posteriormente se hará referencia al montaje de los mismos, así como a la instalación de los dos sistemas de captación de datos utilizados. Para uno de ellos se incluye el proceso de fabricación puesto que es un sistema casero cuya preparación y montaje también ha sido parte de este proyecto.

El siguiente capítulo está dedicado a analizar los datos recogidos desde un punto de vista cualitativo. En este se hace mención del primer problema encontrado durante la realización de los ensayos y que no permitió el aprovechamiento óptimo de las cualidades con las que contaban los soportes. Las pruebas únicamente pudieron realizarse con uno de los actuadores y su posición no pudo ser modificada (colocándolo en otra rueda del vehículo) por falta de tiempo para la realización de estos.

Así mismo, también se hace mención a la calidad de los datos recogidos por cada juego de acelerómetros, distando mucho de lo esperado en el caso de uno de ellos. Esto no nos permitió realizar la comparación que se pretendía entre los resultados del análisis modal experimental con unos sensores y otros. Este fue el segundo de los inconvenientes que se encontraron para el correcto desarrollo de este trabajo.

Finalmente se incluye un apartado sobre el análisis modal experimental propiamente dicho. Como consecuencia de los dos problemas encontrados anteriormente se optó por redefinir los objetivos de este proyecto y se incluyó un estudio previo del método de Ibrahim en dos modelos teóricos (3 gdl y 7 gdl). En este se aproximaban, en la medida de lo posible, las condiciones del análisis a la situación de nuestros ensayos reales, de manera que se pudiera justificar el comportamiento del método y sus limitaciones. De la misma manera, se detallan los resultados finales de la aplicación del método de Ibrahim a los datos registrados por los acelerómetros y una conclusión en la que se esbozan algunas mejoras que pueden tenerse en cuenta para futuras repeticiones de este ensayo en las que utilice este procedimiento de análisis.

Para realizar los diseños se ha utilizado Solid Edge en su versión académica y para todos los cálculos se ha hecho uso de programas implementados en MatLab®.

1.4 Acelerómetros

Para el registro de los datos se va a hacer uso de dos juegos de acelerómetros, un equipo profesional y un set económico. La idea inicial es colocar dos sensores en cada posición, uno de cada tipo, para así realizar un análisis comparativo de sendos registros. Los acelerómetros de calidad son unos PCB Piezotronics 352C33 cuyas características principales son:

- Rango de medida $\pm 490 \frac{m}{s^2} pK$
- Sensibilidad a 100 Hz: $105.3 \frac{mV}{g} (10.74 mV / \frac{m}{s^2})$
- Output Bias 11.6 VDC
- Sensibilidad transversal 0.5 %
- Frecuencia de resonancia 76.8 kHz

En cuanto a los acelerómetros de reducido coste se refiere a unos Bosch BMI160:

- Rango de medida utilizado $\pm 19.62 \frac{m}{s^2} pK$
- 16 bit de capacidad
- Acelerómetro y giroscopio triaxial
- Output 1.2-3.6 V

2 DISEÑO DEL UTILLAJE

Para poder proceder a la realización del ensayo ha sido necesario el diseño de ciertos elementos que harán las bases de estructura de apoyo del monoplaza. La motivación de esto se encuentra en las limitaciones que se encontraron para llevar a cabo los ensayos. Es necesario adaptar los elementos con los que se cuentan en el Laboratorio de Ingeniería Mecánica de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería (Universidad de Sevilla) de manera que se consiga efectuar las pruebas de la manera estimada, haciendo uso de un montaje provisional y sencillo.

2.1 Máquina de ensayos:

Se dispone de una máquina universal de ensayos multiaxial MTS 497 que se compone de:

- Dos actuadores hidráulicos.
- Bastidor adaptable (banco de ensayos).
- Bancada de soporte donde se sitúa el bastidor.
- Grupo de presión (hasta 210 bares con caudal máximo de 25 l/min).
- Dos células de carga (que no serán utilizadas).

2.1.1 Descripción del banco de ensayos

En primer lugar, se va a describir brevemente la forma del banco de ensayos que se ha utilizado para la realización de los experimentos, así como de todos los elementos con los que se cuenta para este fin.

El banco (Figura 2.1), propiamente dicho, se puede describir como una losa de acero de 2 x 1.5 m que cuenta con una serie de guías, las cuales tienen como finalidad la sujeción en ellas de todos los elementos que vayan a ser colocados sobre el bastidor. Este bastidor se encuentra unido a una bancada de soporte que proporciona la firmeza necesaria para su uso.

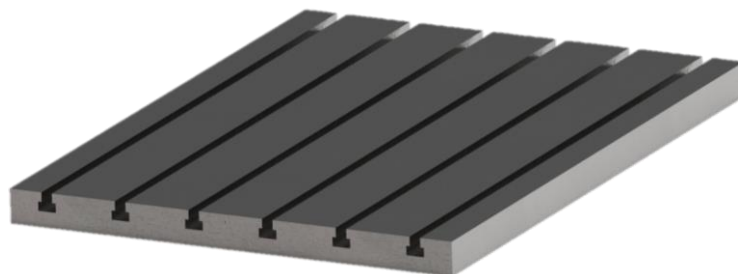


Figura 2.1. Banco de ensayo.

También se dispone de una serie de elementos auxiliares, de acero igualmente, que proporcionan cierta versatilidad para el montaje de los ensayos sobre el banco. Estos elementos tienen la forma que se muestra en la Figura 2.2.



Figura 2.2. Elementos auxiliares.

Para excitar el monoplaza se dispone de dos actuadores que se conectan al grupo de presión que se ha descrito anteriormente. No se cuenta con mucha información acerca de estos actuadores puesto que la máquina se adquirió a una empresa que ya la había tenido en funcionamiento durante un tiempo y no contaba con la hoja de características.

A pesar de esto, tras una búsqueda en la web se consiguió la información de uno de los actuadores, un MTS-242 (el único que finalmente se utilizó por rotura del segundo) [4]. De esta hoja de características se obtuvieron las medida y rangos de desplazamiento, así como el tipo de rosca por la cual se realizaría el acople del utillaje diseñado, al pistón.

2.2 Diseño de los apoyos

Para poder realizar el estudio es necesario colocar el vehículo sobre el banco, introducir una serie de excitaciones en una (o dos) de las ruedas y recabar la información que sea captada por los acelerómetros instalados en distintas posiciones del vehículo. Para poder realizar esto haciendo uso de los actuadores anteriormente descritos se han tenido que diseñar una serie de estructuras cuya finalidad es servir de apoyos para las ruedas que no estén siendo sometidas a vibración en esa configuración del ensayo.

Por simplicidad y economía a la hora de la fabricación se optó por el uso de perfiles comerciales para su diseño. La idea primera consistía en una estructura con forma de trípode con una base en la parte superior donde descansaría la rueda. Esta idea quedó desestimada en el mismo momento que se tomaron las primeras medidas del banco de ensayo. Esto se debe a que se cuenta con el inconveniente de que el tamaño del monoplaza es muy similar al de la mesa (Figura 2.1) por lo que se debía modificar este primer boceto de manera que se consiguiese encuadrar todo el montaje dentro de esta.

Se propuso una modificación de ese “trípode” pero preservando las dos premisas principales: aguantar el peso del vehículo y evitar que la estructura se tambalease durante los ensayos. Esto se consiguió con un montaje como el mostrado en la Figura 2.3.



Figura 2.3. Modelo 3D del apoyo.

Los fundamentos que justifican la forma de todas y cada una de las partes de este apoyo son:

- Posibilidad de colocación y fijación sobre el banco de ensayos.
- Un diseño de apoyo que pudiera ser colocado indistintamente en cualquiera de las cuatro ruedas de nuestro vehículo.
- Evitar, en la medida de lo posible, que el vehículo pudiera deslizar por encima de las bases superiores y precipitarse.
- Mínimo peso.
- Altura suficiente para equiparar la del montaje que hay que realizar para colocar los actuadores en su posición.
- Perfiles con suficiente canto para soportar los esfuerzos a los que puede verse sometido.
- Facilidad de fabricación para disminuir costes.

Tras varias pruebas se optó por la versión mostrada en la Figura 2.3. considerándola como la versión óptima. Se eligió una viga HEB 100 para el pilar central buscando que fuese la más pequeña de su serie de perfiles estructurales (para reducir costes) además de contar con la menor diferencia proporcional entre las inercias de los dos ejes de su sección. Posteriormente fue seleccionado el tipo IPE 80 para las vigas laterales de manera que también fuese la viga de menor tamaño de su serie.

2.2.1 Ensayo con MEF

Para corroborar, previamente a su fabricación, que los soportes eran capaces de aguantar las cargas a las que se verían sometidos, se propuso realizar un ensayo con el método de elementos finitos y analizar el comportamiento de la estructura ante ciertas combinaciones de esfuerzos.

Para empezar, fue necesario efectuar una serie de cálculos básicos y suposiciones para poder llevar a cabo las pruebas. Se decidió tomar el peso del coche completo (230 kg) como el valor de carga vertical que aplica la rueda sobre la base. Para seguir incrementando el margen de seguridad, se optó por suponer una superficie de contacto neumático-base de 165 x 200 mm de manera que se pudiese calcular un valor estimado de la presión aplicada en la zona de contacto y extenderla en toda la superficie de la base superior.

$$Presión = \frac{m * g}{A} = \frac{230 * 10 \text{ N}}{0.165 * 0.2 \text{ m}^2} \approx 70 \text{ kPa}$$

Para asegurarnos de que esta presión es suficiente, se pueden calcular las g de fuerza a las que equivale esta presión con un sencillo cálculo:

$$g \text{ de fuerza} = \frac{P * A_{\text{placa superior}}}{m} = \frac{70 \text{ kPa} * (0.32 * 0.32) \text{ m}^2}{230 \text{ kg}} = 3.12 \text{ g}$$

Teniendo en cuenta que, contando con el g correspondiente al propio peso, la máxima aceleración que se puede inducir en el vehículo sin que este despegue del apoyo son 2g, con esto se garantiza que nuestro diseño cumple holgadamente en este aspecto.

Una vez que se tiene la aproximación de la carga a soportar por el apoyo y sabiendo que se ha mayorado lo suficiente como para contar con un margen de seguridad adecuado, se puede proceder a realizar el análisis mediante el método de los elementos finitos (MEF). Se han aplicado como condiciones de contorno la imposibilidad de movimiento de las bases inferiores. Haciendo uso del programa Catia® se obtienen los siguientes resultados (Las deformaciones que aparecen se encuentran sobredimensionadas para que pudiesen ser apreciables):

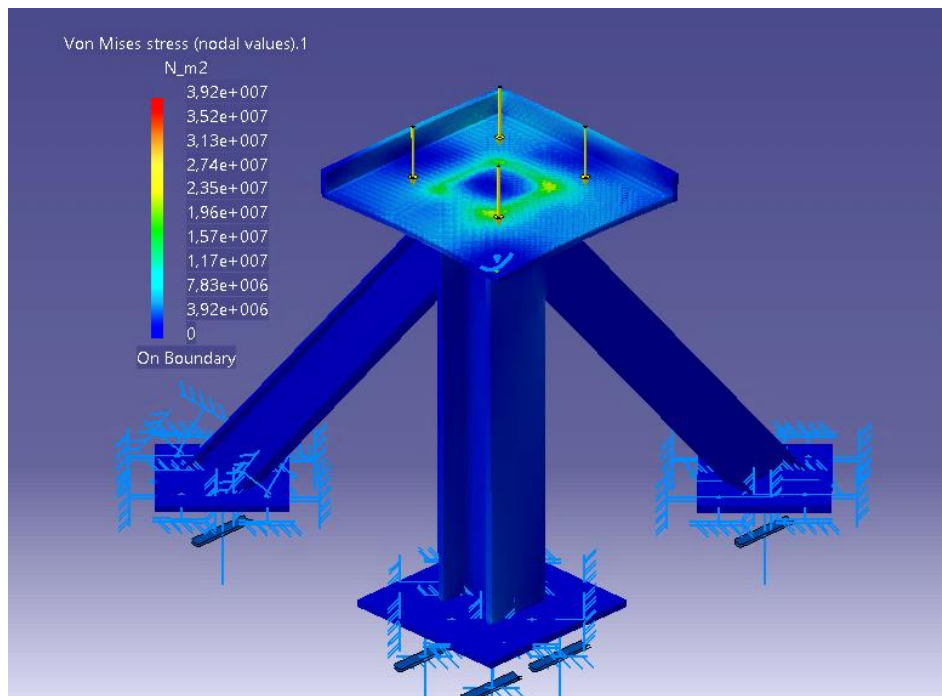


Figura 2.4. Puntos sometidos a mayores tensiones (ensayo 1).

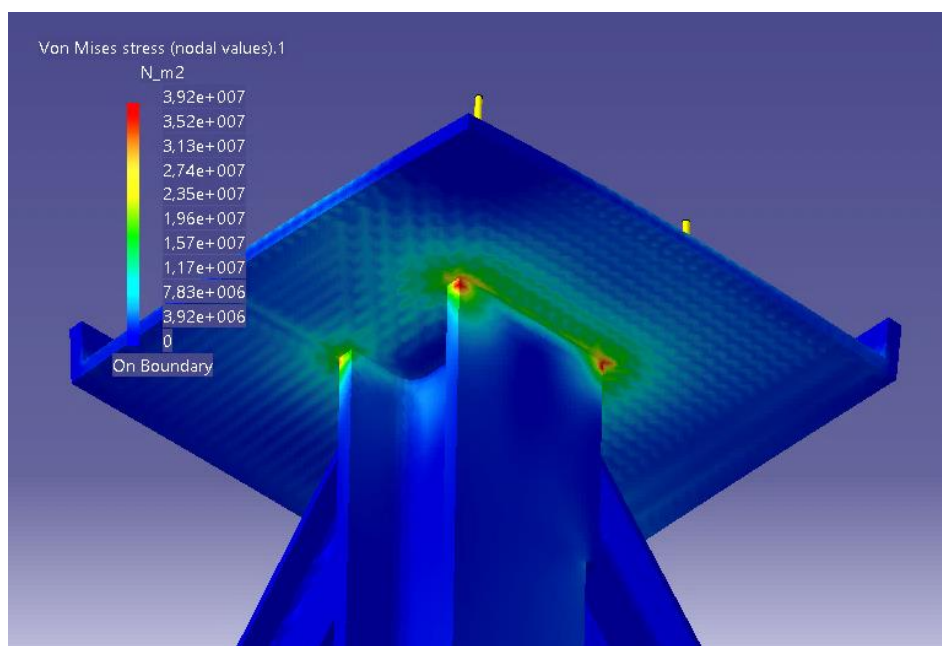


Figura 2.5. Puntos sometidos a mayores tensiones (ensayo 1) (Detalle).

Donde se puede comprobar que no se está superando el límite elástico del acero (200 MPa) en ningún punto de la estructura, lo que nos indica que los perfiles y espesores son adecuados (Planos en el Anexo).

El segundo estudio que se ha realizado es aplicando una carga distribuida lateral sobre el filo de la base superior con valor 5.000 N y que puede simular 5 veces la fuerza que puede ejercer una persona empujando la estructura o el caso de que la vibración produzca algún desplazamiento horizontal. Los resultados son los mostrados en las Figura 2.6. y Figura 2.7.

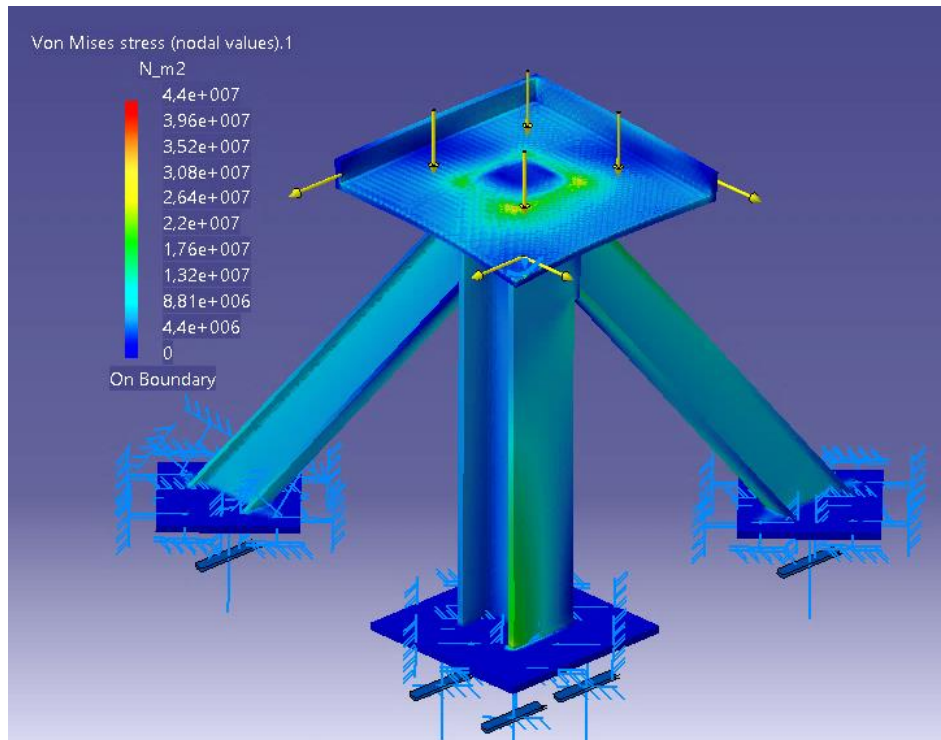


Figura 2.6. Puntos sometidos a mayores tensiones (ensayo 2).

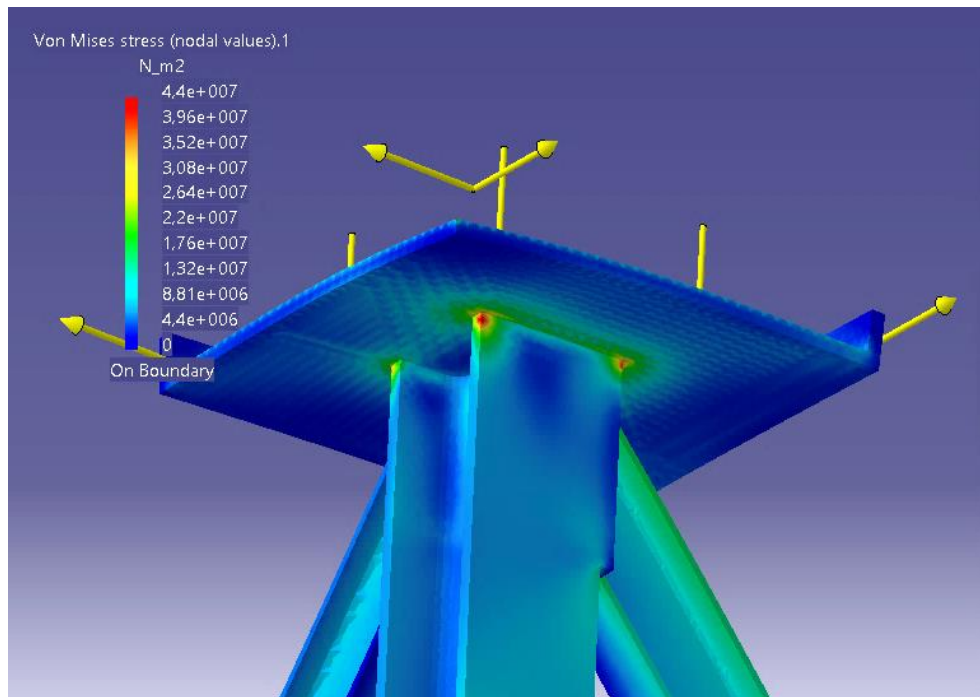


Figura 2.7. Puntos sometidos a mayores tensiones (Detalle) (ensayo 2).

Lo más importante, tanto de estas pruebas como de las anteriores, es observar con detenimiento el comportamiento de las zonas más críticas de los apoyos, como pueden ser la propia placa de apoyo de la rueda

o las vigas transversales. Teniendo en cuenta que no se incluían radios de acuerdo en el diseño ensayado y que en el modelo real las uniones se realizarán mediante soldaduras, los concentradores de tensión se verán reducidos por los radios de acuerdo que estas crean. Además, viendo que las zonas más críticas se encuentran en las partes con mayores concentradores (como las esquinas) y que aun así cumplen con las limitaciones de nuestro material, no nos cabe duda de que no existirá problema alguno durante el uso de los soportes.

2.3 Diseño de la base del actuador

La segunda parte del proceso de diseño consiste en la creación de un elemento cuya función es hacer de pieza de unión entre el actuador y la rueda de que está siendo excitada. Los requisitos de diseño son similares a los descritos previamente en el diseño de los apoyos. En este caso se habla de una pieza de mayor simplicidad que la anterior:

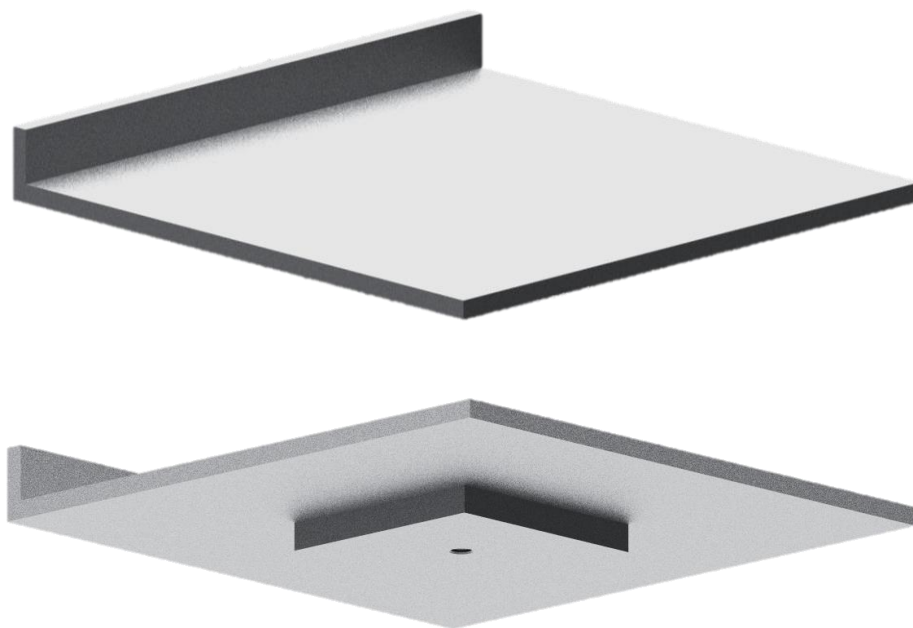


Figura 2.8. Base para actuador.

En la parte inferior cuenta con un agujero roscado (1/2 - 20 UNF-2B) de manera que sea posible la unión entre el pistón del actuador y la base haciendo uso de una pieza que se encontraba en el laboratorio (Figura 2.9).



Figura 2.9. Pieza de unión entre el actuador y la base.

2.3.1 Ensayo con MEF

Realizando un ensayo por el MEF de la base del actuador con una presión sobre la cara superior del mismo valor que el comentado anteriormente se obtiene:

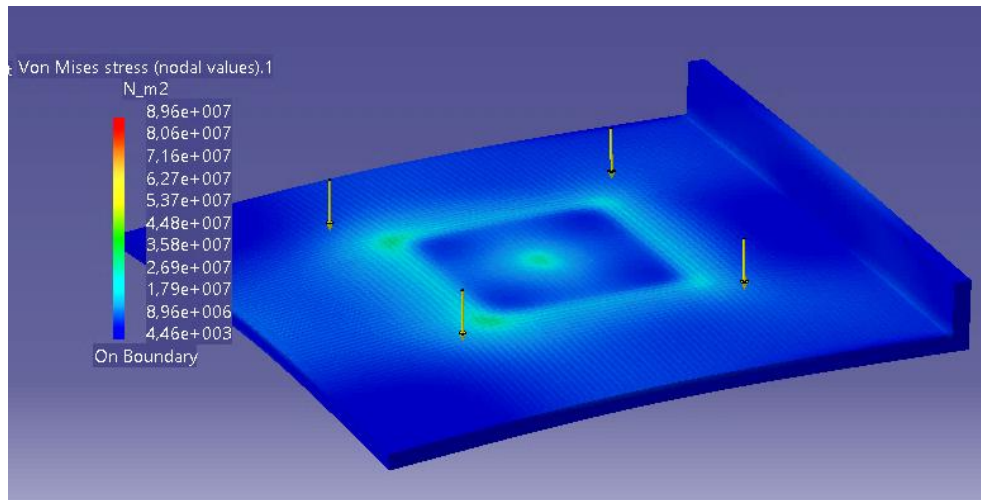


Figura 2.10. Puntos sometidos a mayores tensiones en la base del actuador.

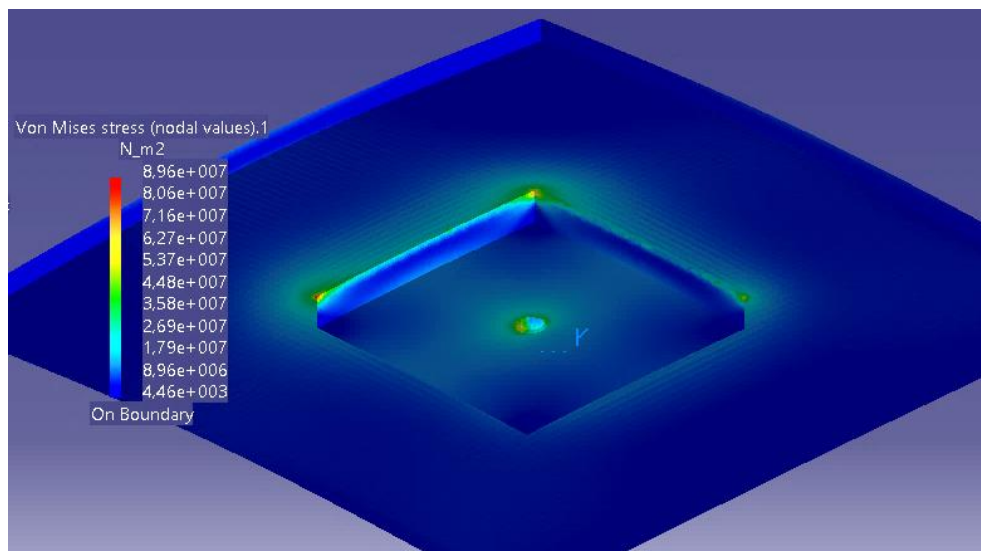


Figura 2.11. Puntos sometidos a mayores tensiones en la base del actuador (Detalle).

Comprobándose que el diseño es adecuado para la finalidad que se requiere. En este caso puede hacerse el mismo comentario acerca de los concentradores de tensión que el del Apartado 2.2.1. Con esto concluye la fase de diseño de los elementos auxiliares que se utilizarán para el desarrollo de los ensayos.

3 MONTAJE

En el presente apartado se pretende describir cómo se ha llevado a cabo el montaje de los elementos para la realización del ensayo. En primer lugar se aborda la idea de partida, la cual sirvió de base para el diseño de todos los elementos y posteriormente se incluyen imágenes de como ha quedado finalmente esta disposición en la realidad.

3.1 Esquema del montaje

Como se ha descrito anteriormente, el banco de ensayos cuenta con una serie de guías que servirán de puntos de anclaje de todos los elementos. Los apoyos cuentan con una serie de orificios en sus bases en los que se introducirán unos tornillos que a su vez pasarán a través de las guías hasta alcanzar unas pequeñas piezas de hierro que cumplirán la función de tuercas (Figura 3.1.). Tras apretar los tornillos, todo el montaje debería quedar unido rígidamente a la mesa.

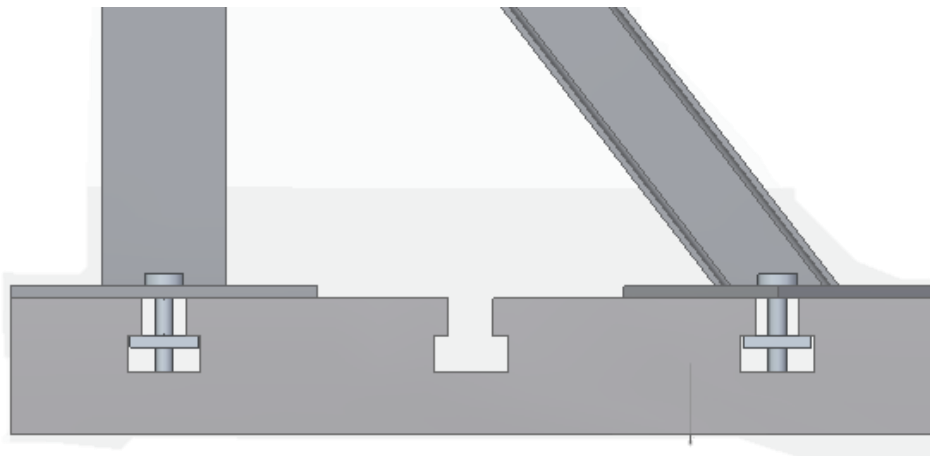


Figura 3.1. Esquema de la colocación de los tornillos en las guías.

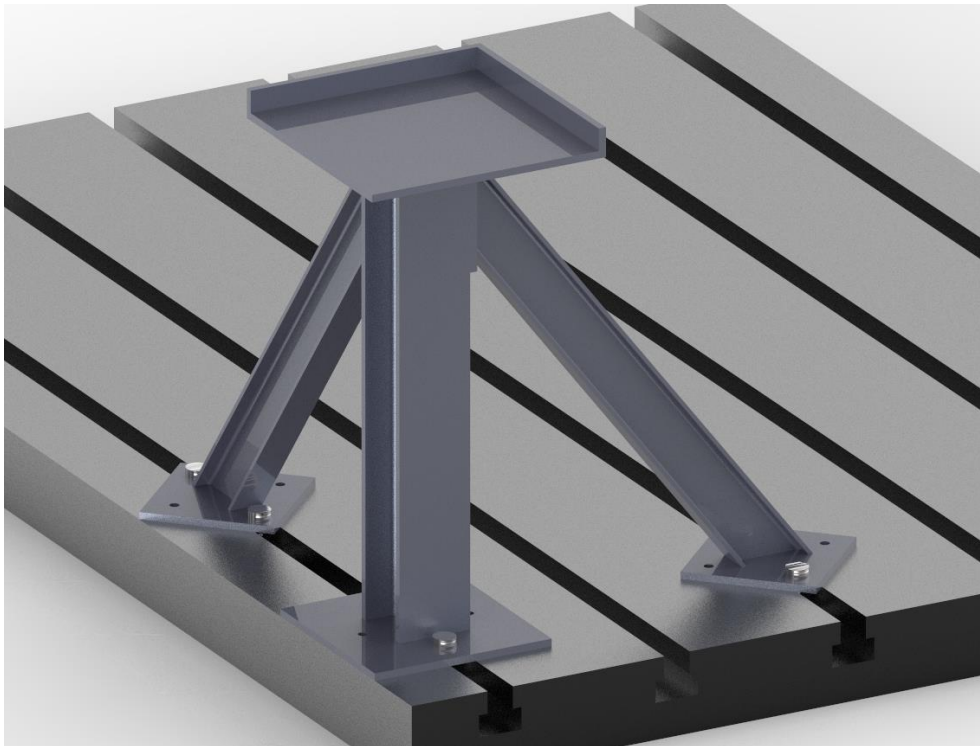


Figura 3.2. Esquema 3D de un apoyo colocado.

En el caso del actuador se hará uso de las columnas auxiliares (Figura 2.2) para conseguir, así, colocar el actuador en su posición vertical. La unión también se realizará mediante tornillos y placas haciendo de mordazas.

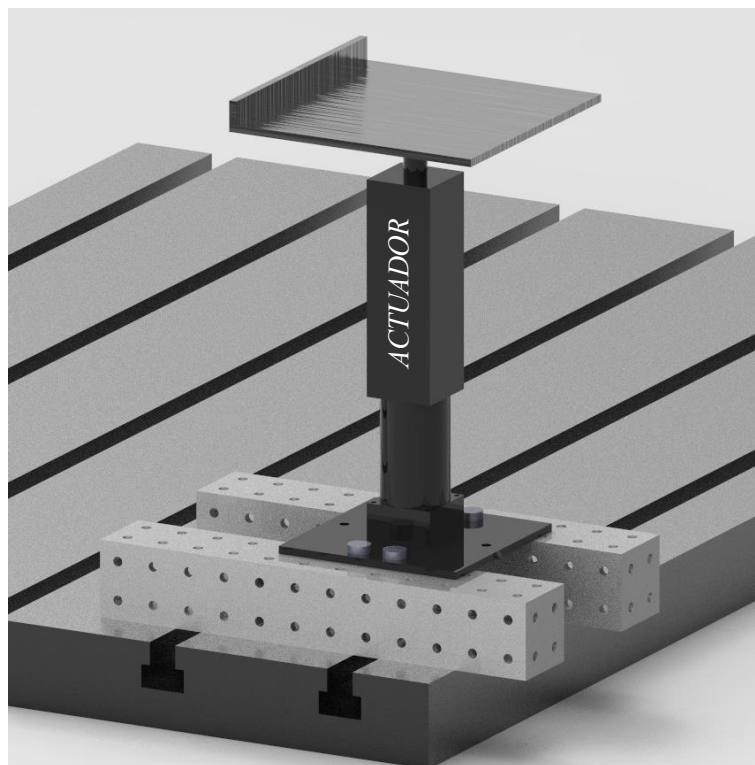


Figura 3.3. Montaje del actuador.

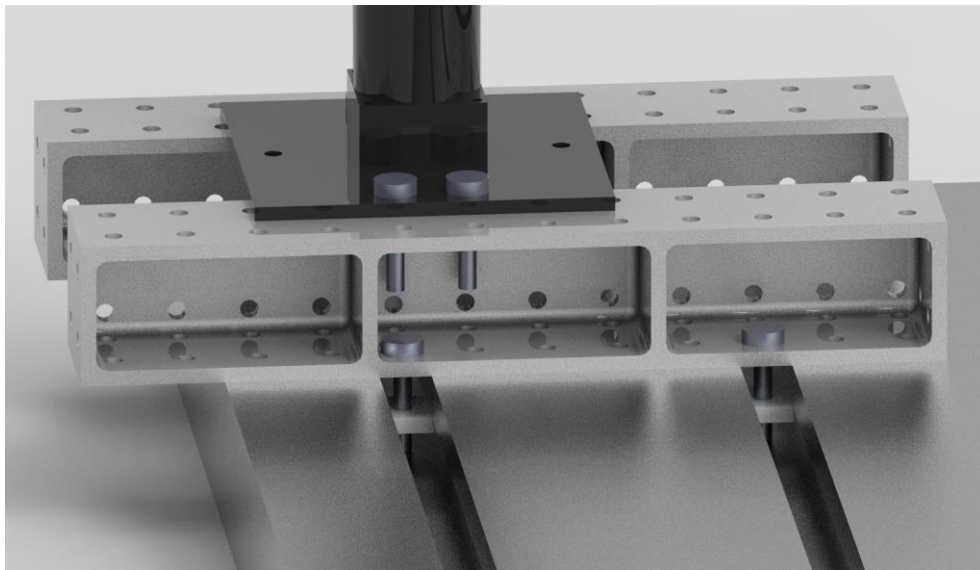


Figura 3.4. Montaje del actuador (Detalle).

La posición del actuador irá variando, colocándose en cada una de las ruedas para conseguir así una amplia gama de registros de cara al análisis del comportamiento del monoplaza. El montaje se llevará a cabo de manera equivalente para cada configuración, algo que se ve enormemente facilitado gracias a la premisa de diseño con la que se contaba, por la cual, la forma de los apoyos debía permitir su colocación en cualquiera de las esquinas del banco indistintamente.

3.2 Montaje completo

Con todo esto se puede realizar un previstualizado de cómo quedaría todo el conjunto. Esto se puede ver en la Figura 3.5 en la que se ha incluido también un esquema de las ruedas (con dimensiones reales) de manera que pueda apreciarse con claridad cómo sería el resultado.



Figura 3.5. Montaje completo.

En cuanto a la realidad se refiere, el montaje quedó de la siguiente forma:



Figura 3.6. Montaje real para el ensayo.



Figura 3.7. Montaje real para el ensayo (2).

Se puede observar que las ruedas están sujetas mediante unas eslingas y esto puede llevar a pensar que se está introduciendo una rigidez extra que falsee los resultados de la medición. Se ha de comentar que estas estaban colocadas únicamente a modo de prevención en caso de accidente y que su apriete no era lo suficientemente alto como para influir en las mediciones. En las Figuras siguiente se pueden ver algunos detalles más del montaje en los que se aprecia cómo este se realizó acorde a la idea inicial de diseño.

*Figura 3.8. Rueda con actuador**Figura 3.9. Rueda con apoyo.**Figura 3.10. Detalle anclaje de apoyos y actuador.*

Es muy importante destacar en este punto que la disponibilidad del monoplaza se limitó a una única jornada, en la que debía realizarse todo el montaje junto con los ensayos. Por esto, finalmente los ensayos quedaron restringidos únicamente a la excitación de la rueda trasera derecha, realizando un barrido en frecuencia desde 0.5 Hz hasta 25 Hz en vibración forzada y tres ensayos en vibración libre con distintas amplitudes de desplazamiento del actuador.

Haber contado con una mayor disponibilidad del vehículo nos habría permitido efectuar de un número muy

superior de ensayos y teniendo en cuenta la gran inversión realizada para la fabricación del utillaje, así como el considerable tiempo empleado en el montaje del ensayo, esto habría sido muy interesante. Esto no fue posible debido a la apretada agenda con la que cuenta el equipo, el cual se ve en la obligación de exponer el vehículo en un cuantioso número de eventos para obtener la financiación que necesitan para desarrollar el monoplaza de la siguiente temporada. A su vez, se debe agradecer en gran medida la ayuda proporcionada por el equipo para la realización del montaje puesto que, debido a la gran dificultad que suponía la colocación del vehículo sobre los soportes dentro de la habitación de ensayos, no habría sido posible sin su ayuda.

4 SISTEMA DE CAPTACIÓN

A continuación se procede a describir el procedimiento seguido para la preparación y montaje del sistema de captación de datos de los acelerómetros. En nuestro caso, los ensayos se desarrollaron haciendo uso de una decena de acelerómetros, desde cinco puntos distintos del monoplaza, es decir, con dos acelerómetros en cada punto. Este montaje se debe a que se contaba con cinco acelerómetros de gran calidad y otros cinco de bajo coste y una de las fases de análisis reside en comprobar el correcto funcionamiento, o no, de ambos y la comparación de los resultados. Puesto que los acelerómetros de alta gama cuentan con su propio sistema de captación, ya preparado para su uso, únicamente fue necesario crear el correspondiente a los acelerómetros económicos.

4.1 Preparación de la instalación

Partiendo de unos fotolitos proporcionados por Pedro Urda Gómez [5] impresos en papel vegetal, se procedió al velado de una placa de circuito impreso fotosensible haciendo uso de una insoladora. Una vez terminado este primer paso, se realizó el revelado de la misma con ácido, consiguiendo como resultado la placa que se observa en la Figura 4.1. Debido al deteriorado estado en el que se encuentra la insoladora, se puede apreciar que no todos los circuitos revelados son útiles debido a la mala calidad de la impresión en ciertas zonas de esta. Afortunadamente se obtuvieron siete circuitos bien acabados, más de los necesarios para nuestro ensayo.

El siguiente paso, dentro de este procedimiento de creación de circuitos impresos, es la perforación de los orificios donde posteriormente se introducirán los pines de los componentes electrónicos (Proceso mostrado en la Figura 4.1). Tras esto, era necesario realizar el corte de la placa y así conseguir los cinco circuitos que se necesitaban, donde se colocarían los acelerómetros. Se realizó una comprobación del buen estado de todas las pistas con un polímetro para garantizar que no existiesen faltas de continuidad.

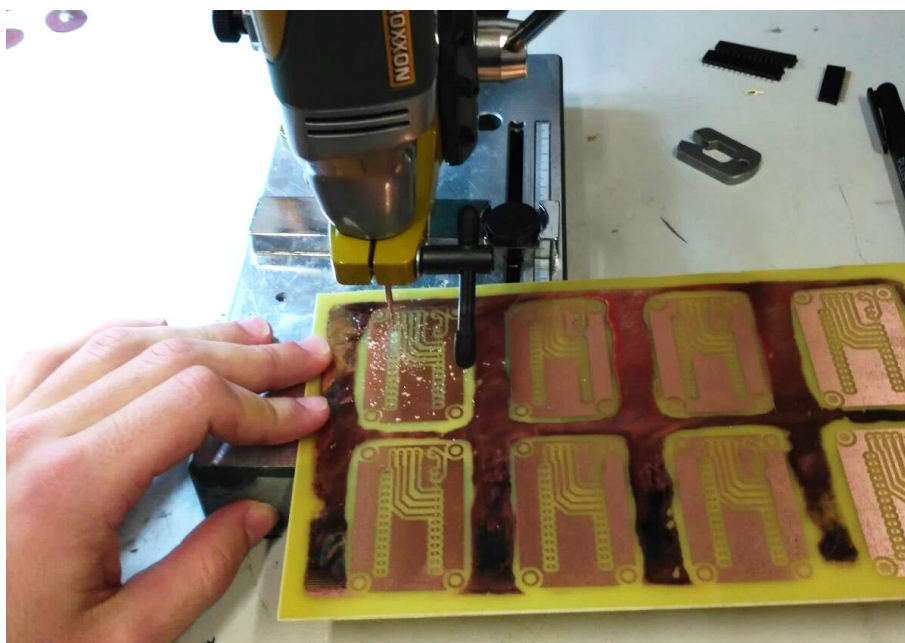


Figura 4.1. Perforación de las placas de circuito impreso.

Una vez terminada la preparación de las placas se realizó el montaje de los componentes en ellas mediante la soldadura de los numerosos pines con los que cuentan (Figura 4.2). Tras esto, se comprobaron nuevamente todas las conexiones con el polímetro para garantizar el correcto montaje de los elementos.

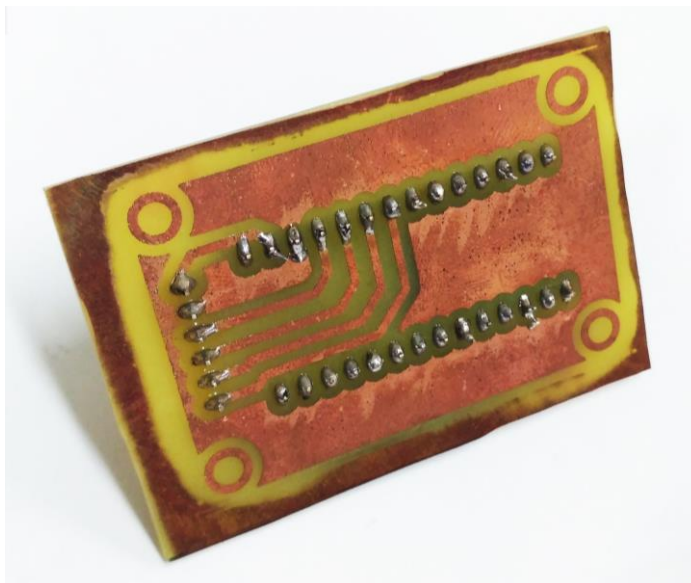


Figura 4.2. Placa de acelerómetro económico soldada.

Por otro lado, se preparó el cableado para llevar a cabo las conexiones entre los circuitos impresos de los acelerómetros y la Protoboard (placa de pruebas) donde se instala el microcontrolador Mbed (Figura 4.5). Fue necesario instalar una serie de pines en los extremos de cada filamento (Se pueden ver en la Figura 4.4), así como las fichas de conexión que unirían el cable al circuito impreso donde se colocaría el acelerómetro. La función principal en la que se basa el diseño de una Protoboard es la realización de prototipos o circuitos de prueba de manera rápida y eficiente mediante conexiones en serie y paralelo aprovechando la disposición de las conexiones de esta. Además, están especialmente diseñadas para que un sinnúmero de componentes puedan ser insertados en ellas de manera simple, pudiendo añadir las conexiones que nos sean necesarias y completar el circuito electrónico. De la misma manera, todas estas conexiones podrán ser modificadas o retiradas permitiendo la utilización de la placa para otro montaje.

Conociendo el funcionamiento y la disposición de los pines de la Mbed (Figura 4.3) (microcontrolador) se dispusieron las conexiones de cada acelerómetro de manera adecuada, provenientes de cables de seis filamentos (Figura 4.4) cuyas funciones eran:

- Cable gris: tierra.
- Cable rojo: alimentación.
- Cable amarillo: MOSI.
- Cable verde: MISO.
- Cable azul: SCK.
- Cable blanco: CS.

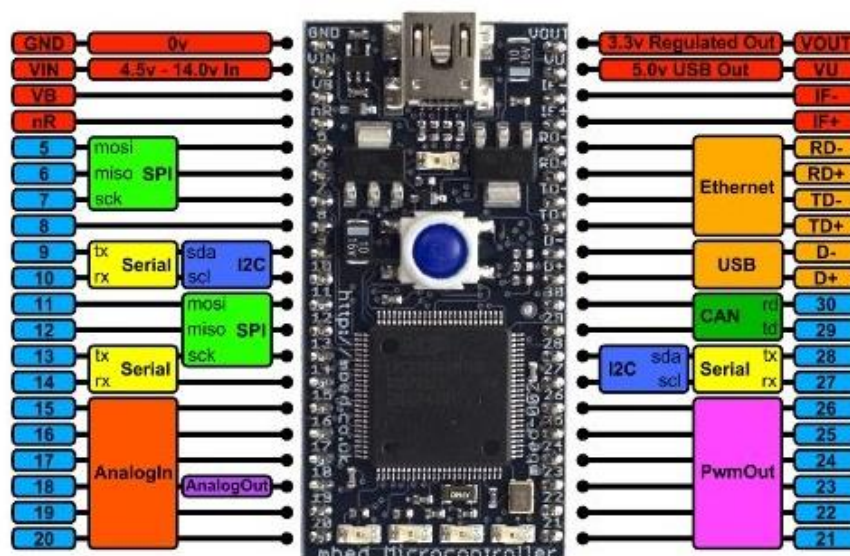


Figura 4.3. Esquema de pines de la Mbed [6].

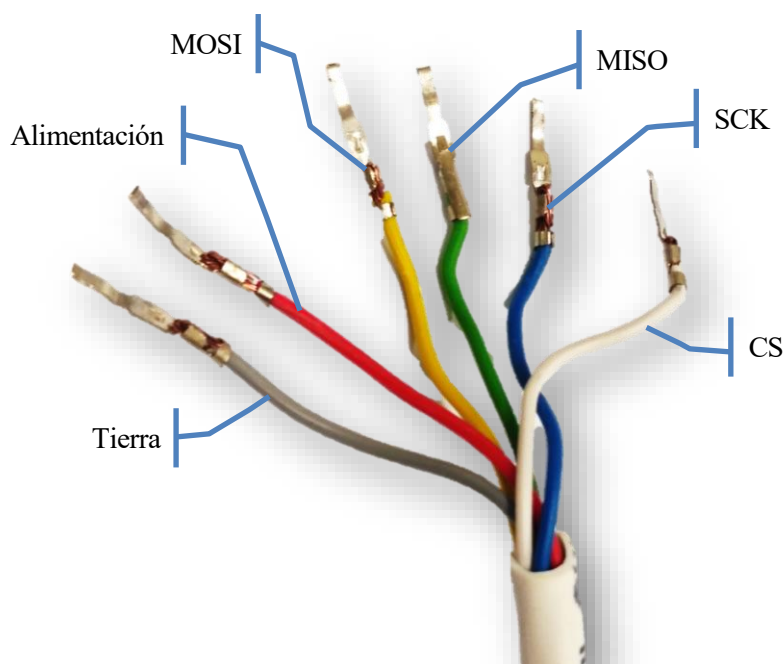


Figura 4.4. Cable de seis filamentos.

Mediante las conexiones MOSI, MISO y SCK (Conjunto SPI) se realiza el traspaso de datos desde los acelerómetros, pudiendo conectar varios de estos al mismo conjunto de pines SPI y con el pin CS (Chip Select) se gestiona de cuál de estos sensores se debe recoger la información en cada momento. Los pines CS pueden conectarse en cualquiera de las otras entradas libres de la Mbed, en nuestro caso los pines: 8, 9, 10, 14 y 15. Una conexión primordial es la de tierra, puesto que se recomienda que todas se relacionen con el mismo pin para un mejor funcionamiento del circuito.

Tras esto se volvió a realizar una comprobación de continuidad eléctrica para asegurar las conexiones. Con esto finalizaba la preparación del sistema de captación de datos para los acelerómetros económicos que se usaron en nuestro ensayo (Figura 4.5).

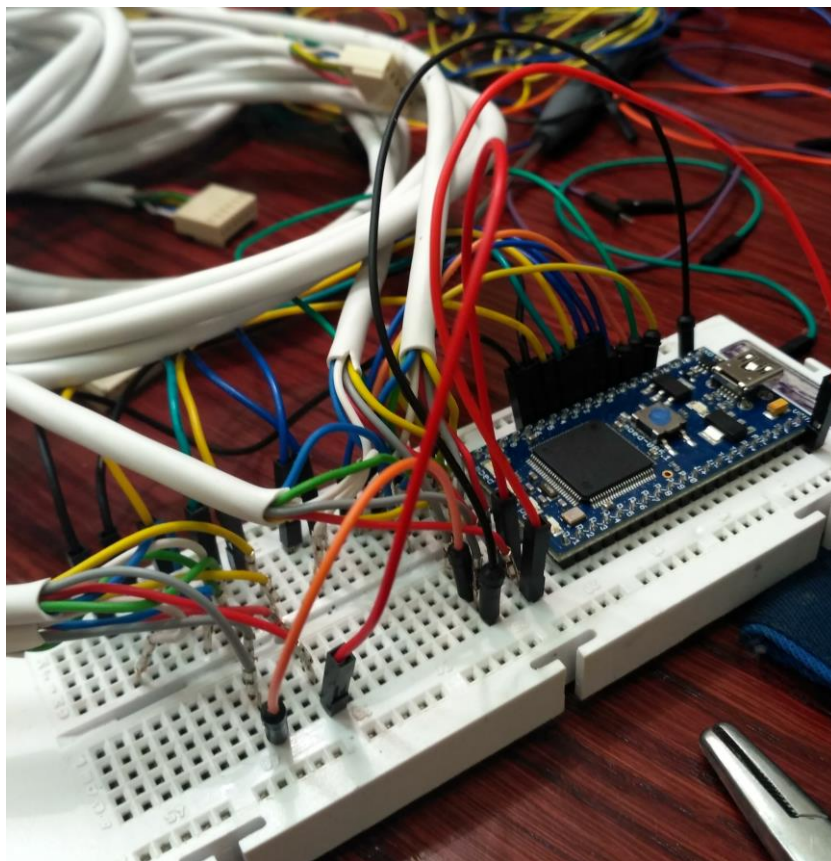


Figura 4.5. Protoboard con todas las conexiones y el microcontrolador.

4.2 Colocación del sistema en el vehículo

Una vez colocado el coche en la posición de ensayo haciendo uso de un puente grúa y de la ayuda de un gran número de componentes del equipo, y habiendo asegurado todo el montaje, se efectuó la colocación de los diez acelerómetros en las zonas que se consideraron más favorables para ello (Figura 4.6). Los cinco acelerómetros de alta calidad se colocaron con adhesivo como se puede ver en las imágenes (Figura 4.7 a Figura 4.9), donde se buscaba la firmeza y verticalidad del sensor.

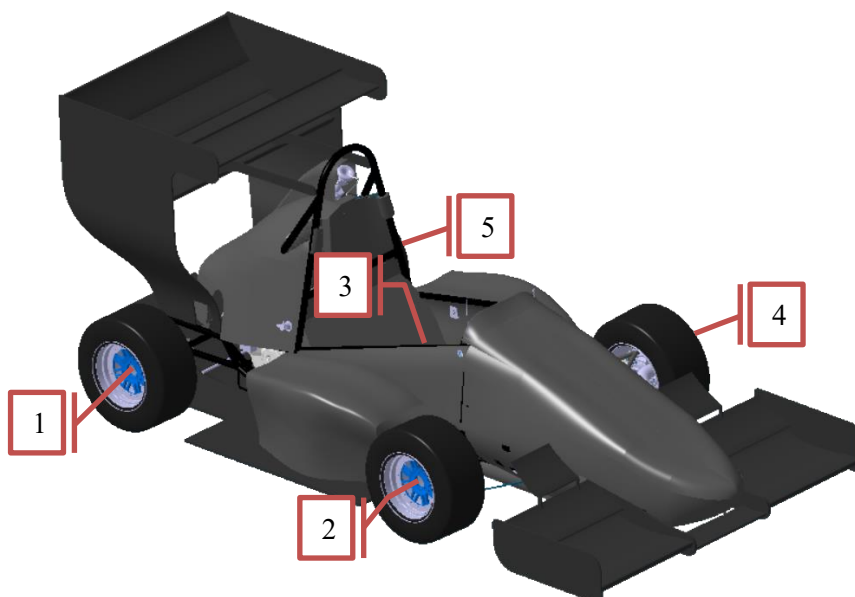


Figura 4.6. Esquema del posicionamiento de los acelerómetros.

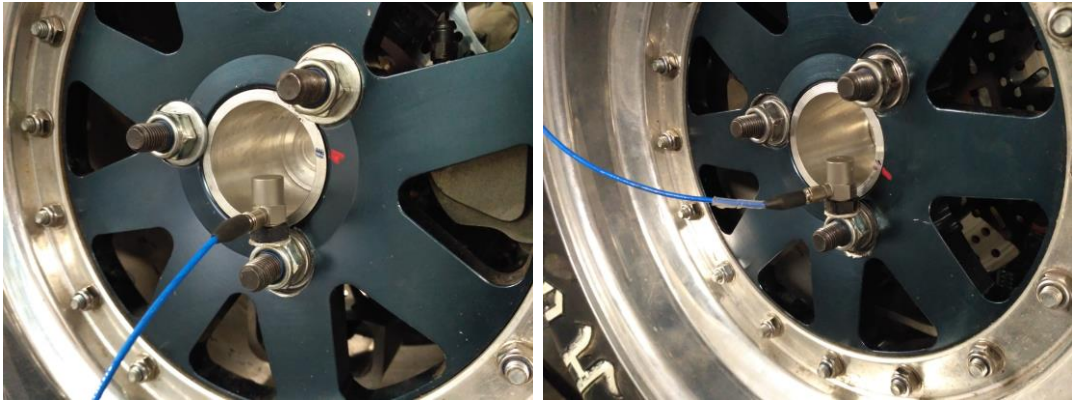


Figura 4.7. Acelerómetros de las ruedas traseras.

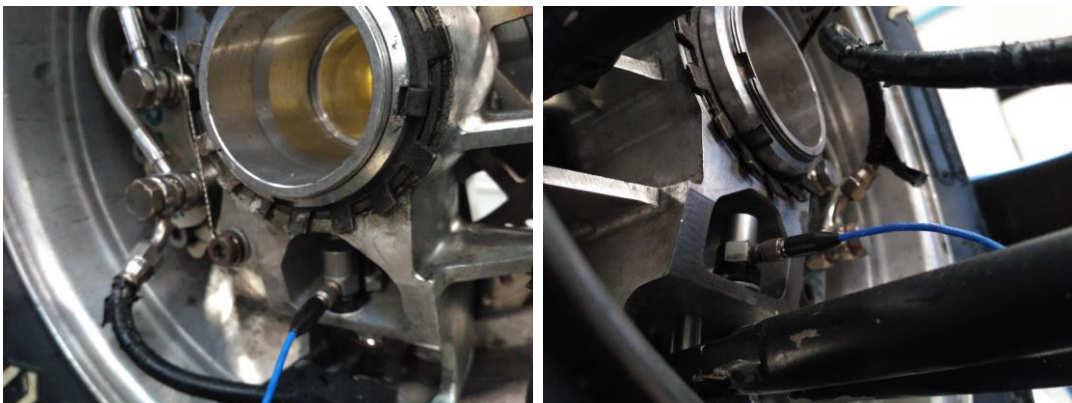


Figura 4.8. Acelerómetros de las ruedas delanteras (por la cara interna).

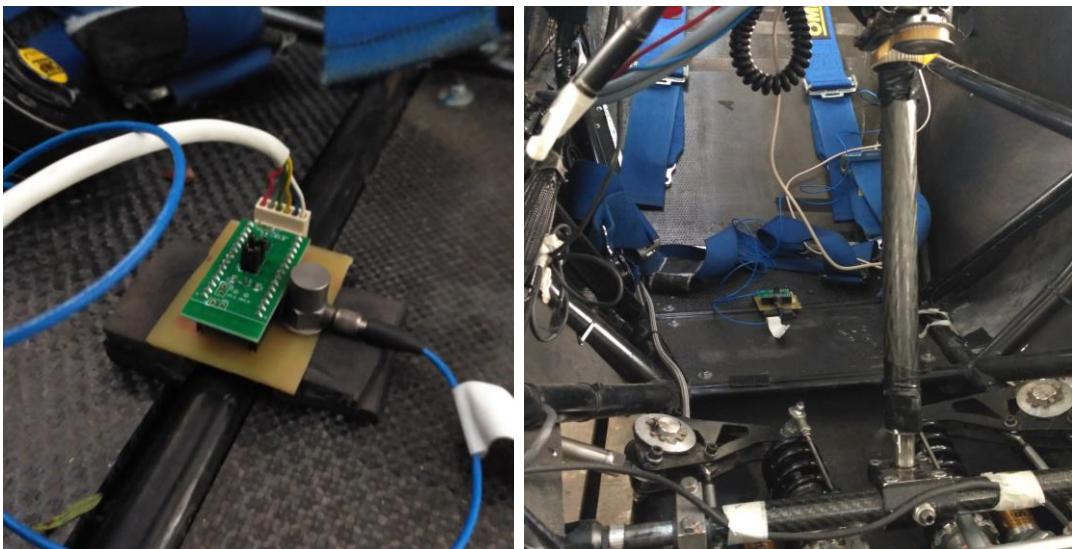


Figura 4.9. Acelerómetro del chasis (zona del asiento del piloto).

En lo que respecta a los acelerómetros de baja calidad, su colocación resultó más tediosa debido al mayor tamaño de estos. La disposición fue la que puede observarse en las Figura 4.10 y Figura 4.11. En este caso fueron fijados mediante cinta adhesiva de doble cara. Aunque puede parecer que esta cinta no consigue una unión firme, debido a la masa minúscula del circuito del acelerómetro, en principio esto no supondría ningún problema. Se puede ver como se buscaron posiciones lo más verticales u horizontales posibles. De esta forma, se consigue toda la información tomando los datos de un único eje de los tres con los que registran los sensores.



Figura 4.10. Acel. de bajo coste en ruedas delanteras.

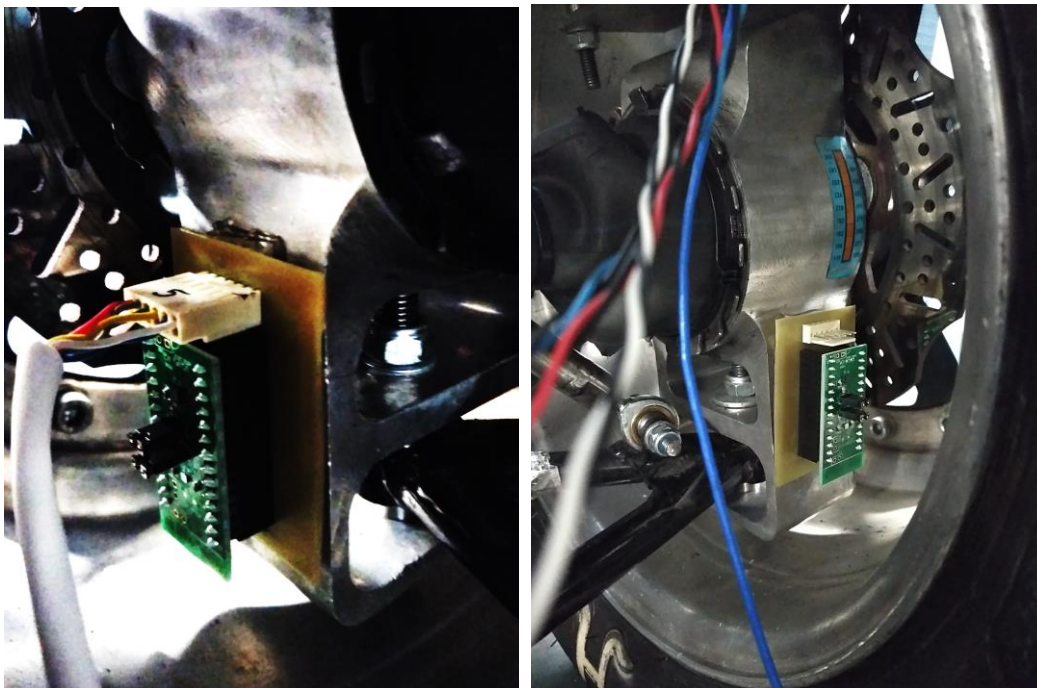


Figura 4.11. Acel. de bajo coste en ruedas traseras (parte interna).

Como se puede apreciar, exceptuando el acelerómetro del bastidor, el resto de las parejas de estos no pudieron ser colocados en la misma posición debido a las limitaciones físicas que esto suponía a la hora de cumplir con los requisitos de instalación. Por tanto, habrá que tener esto en cuenta de cara al análisis de resultados, puesto que esta diferencia puede conllevar variaciones en los datos medidos. La diferencia entre la colocación en la zona exterior (en la llanta) o en la zona interna (mangueta) implica que el juego existente en los rodamientos de esta segunda conlleve una diferencia entre ambas medidas. Aunque se considera que debe ser depreciable, se creía necesario tener constancia de ello.

En lo que respecta al acelerómetro instalado en el bastidor (Figura 4.9), el cumplimiento de las premisas anteriormente comentadas en su colocación acarrea una importante dificultad debido a la geometría de la zona en la que se quería colocar. Por esto, fue necesario añadir piezas de neopreno alrededor del acelerómetro de

manera que quedase instalado de la manera correcta y aislado de las vibraciones de las piezas de fibra de carbono adyacentes. Se colocó la base (la placa de circuito impreso en este caso) horizontal sobre el tubo. El acelerómetro de alta calidad se colocó sobre uno de los lados del circuito.

En cada caso, los acelerómetros estaban conectados a su sistema de captación. Los de alta gama ya cuentan con un sistema propio de procesamiento junto con programa para el registro adecuado de los datos. En cuanto a los económicos, se conectaban haciendo uso del sistema que se había fabricado para tal efecto y que se ha explicado en el subapartado anterior. Para el registro de datos, se utilizó un programa en Python[®] mediante el cual se grababa la información emitida por el microcontrolador, conectado al ordenador mediante un puerto USB.

5 DATOS OBTENIDOS

En el siguiente apartado se describe el proceso seguido durante la lectura de información, así como dilucidar algunas peculiaridades que se fueron encontrando durante la realización de esta. También se analizará la información obtenida y se justificarán ciertas decisiones que se han tomado de cara a la ejecución del análisis modal experimental propiamente dicho.

5.1 Ensayos

Aunque la idea inicial contaba con la realización de los ensayos modificando el punto de excitación (cambiado de rueda el actuador) esto no pudo realizarse por falta de tiempo, viéndonos en la obligación de realizar los registros excitando exclusivamente la rueda trasera derecha.

Se realizaron dos tipos de mediciones, con vibración libre y forzada. En el primer caso se tomaron tres registros de 60 segundos variando la amplitud del escalón que realizaba el actuador, tomando como referencia la posición de equilibrio del vehículo y haciéndolo elevarse hasta una medida A y posteriormente descendiendo hasta $-A$ con $A = 1, 2$ y 3 mm . Se repetía esta secuencia con cierta frecuencia durante los 60 segundos. Por esto, habrá que tener en cuenta que se cuenta con dos tipos de excitación distintos (Figura 5.1), el desplazamiento ascendente del pistón y el descendente. Para cualquier análisis comparativo se deberá tomar el mismo tipo en todos los casos. Para los ensayos en vibración forzada se realizaron intervalos de muestreo de 20 segundos, habiéndonos cerciorado previamente de que había concluido el transitorio debido al cambio de frecuencia y amplitud.

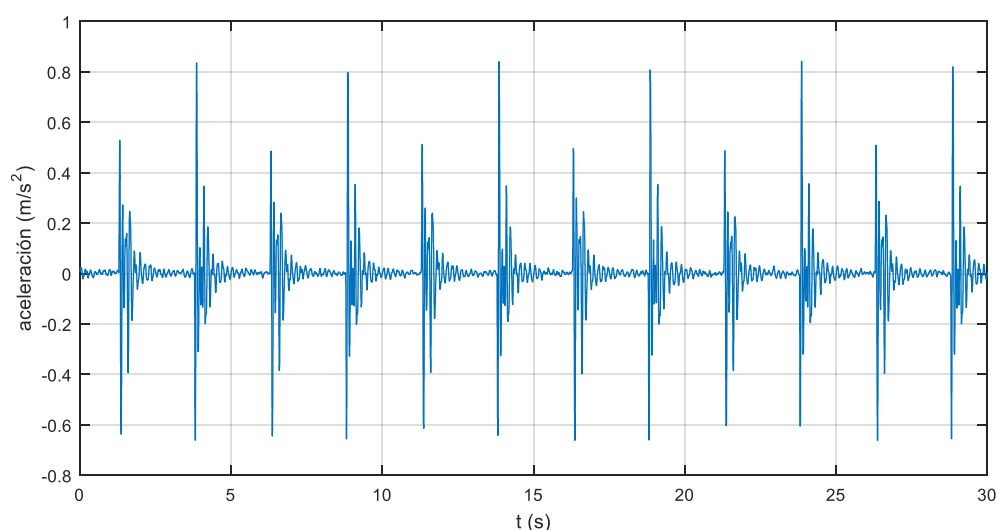


Figura 5.1. Fragmento de un registro en vibración libre.

En vibración forzada se registraron 50 ensayos distintos, para diferentes frecuencias desde 0.5 Hz hasta 25 Hz con variaciones de 0.5 Hz de una a otra. La amplitud de la oscilación se modificaba en función de la frecuencia de manera que se garantizase que las aceleraciones máximas (y mínimas) quedasen dentro del rango de lectura del sistema de los acelerómetros económicos comentado anteriormente.

5.2 Captación de los datos

Como se ha comentado anteriormente, el registro de los datos se vio limitado temporalmente debido al estrecho margen con el que se contaba para la realización de los ensayos. Por tanto, los errores o irregularidades que surgían a la hora del desarrollo de las mediciones debían ser subsanadas en el momento y con la mayor brevedad posible.

En primer lugar, se encontró un problema de gravedad debido a que el sistema de registro de datos de los sensores de calidad recibía información únicamente de cuatro acelerómetros, lo que nos llevó a tener que revisar toda la instalación hasta detectar que el cable que unía el sensor con el controlador estaba dañado. Tras conseguir un nuevo cable e instalarlo se pudo comprobar que se había solucionado el problema.

En cuanto a la recogida de los datos proporcionados por los acelerómetros económicos sucedieron una gran variedad de errores debido a que el programa de captación no se comportaba adecuadamente o el microcontrolador no cargaba el programa de manera correcta. Tras muchas modificaciones y con la colaboración de Pedro Urda [5], se consiguieron subsanar.

Una vez iniciados los ensayos propiamente dichos y tras realizar varias pruebas, se encontró el segundo fallo de importancia. Este se debía al mal funcionamiento del acelerómetro de baja calidad colocado en la rueda trasera derecha, la cual se estaba excitando. Este error fue fácilmente identificable puesto que, al graficar las aceleraciones captadas por este en algunos de los ensayos, se pudo observar que en algunos de los registros se producían picos al fondo de escala en las mediciones. Se realizaron varias pruebas más y algunos cambios hasta que se consideró que dicho sensor se encontraba en mal estado, por lo que sus registros no serían válidos. Por esto, se descartará la información de este acelerómetro en cualquier análisis que se realice en próximos apartados de este proyecto. La Figura 5.2 ilustra todo lo comentado en este párrafo, donde se representa la información captada por el acelerómetro 1 en el ensayo de vibración forzada a 2.5 Hz y con $\pm 5\text{ mm}$ de amplitud en el desplazamiento. Obviamente esta se encuentra centrada en cero puesto que se ha restado el valor de la gravedad a todo el registro de manera que únicamente se observen las variaciones propias de la vibración.

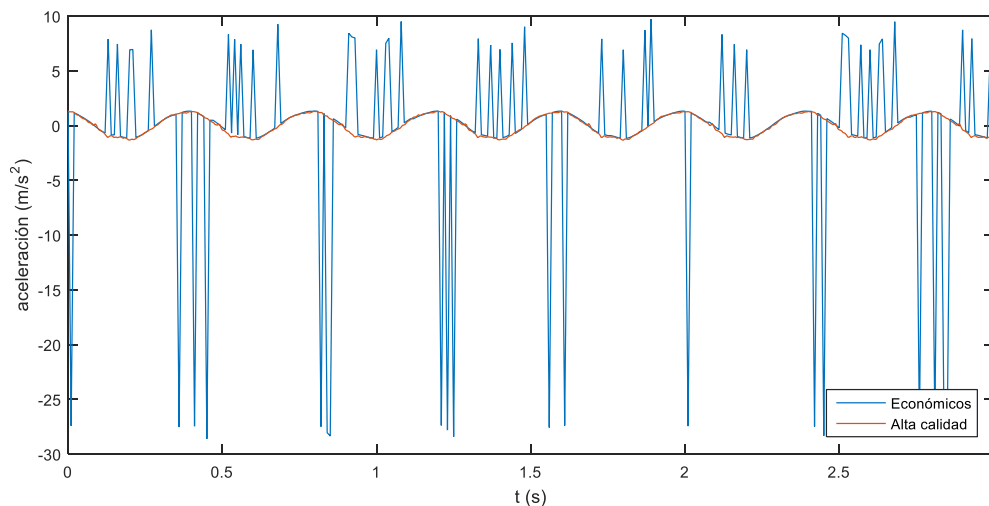


Figura 5.2. Vibración forzada acelerómetro 1 a 2.5 Hz.

Como puede verse, cuando se superponen las medidas de los dos acelerómetros colocados en la rueda excitada, en los registros del que tiene menor coste se pueden observar los picos comentados con anterioridad. Cuando se hablaba de que la medida alcanzaba el fondo de escala se debe al tratamiento informático que el programa hace de los datos. En el programa se había estipulado unos valores máximos del registro de $\pm 2g$ (siendo g el valor de la gravedad) por lo que se adecuaba la amplitud de la vibración y la frecuencia de modo que no se superasen los extremos de este rango. Los 16 bits con los que contaba permitían 2^{16} valores distintos de registro. Si se observa la gráfica, teniendo en cuenta el desplazamiento que se ha impuesto para descontar el valor de la gravedad, se puede observar cómo los picos rondan los valores de $+g$ y $-3g$, es decir, el fondo de escala.

Es apreciable que el comportamiento de ambos acelerómetros, en este caso, es prácticamente idéntico lo que nos aporta cierta seguridad en la información.

5.3 Postproceso

Partiendo de los archivos generados el día de los ensayos ha sido necesario realizar un leve postproceso de los mismos para adecuarlos a nuestros intereses.

En el caso de los acelerómetros de bajo costo fue necesario adecuar la distribución que realizaba el programa con respecto a los bits de memoria y el rango seleccionado de medición. Esta conversión únicamente constaba de la multiplicación de todos los registros por una constante $Cte = 4g/2^{16}$, donde se está teniendo en cuenta la amplitud del rango ($4g$) y el número de registros que era capaz de interpretar el sensor.

Para los acelerómetros profesionales sólo es necesario reordenar las columnas que contienen la información de manera que se adecuen al orden en el que están colocados los económicos.

Al graficar los ensayos realizados en vibración libre se encontró un nuevo error debido a un cambio de frecuencia de muestreo que se realizó el día de los ensayos, por el cual se duplicaba esta de 100 a 200 Hz en los acelerómetros de menos calidad. Sin embargo, debido a que esto se modificó en el programa, pero no en el sistema de captación, este siguió registrando la información a 100 Hz y el programa duplicó todas las medidas para conseguir registros del doble de frecuencia. Por ello, en el postproceso de estos archivos ha sido necesario eliminar la información duplicada, quedando el paso entre registro y registro, del mismo tamaño que el que se tenía previamente al cambio de frecuencia. Esto se puede observar en la Figura 5.3.

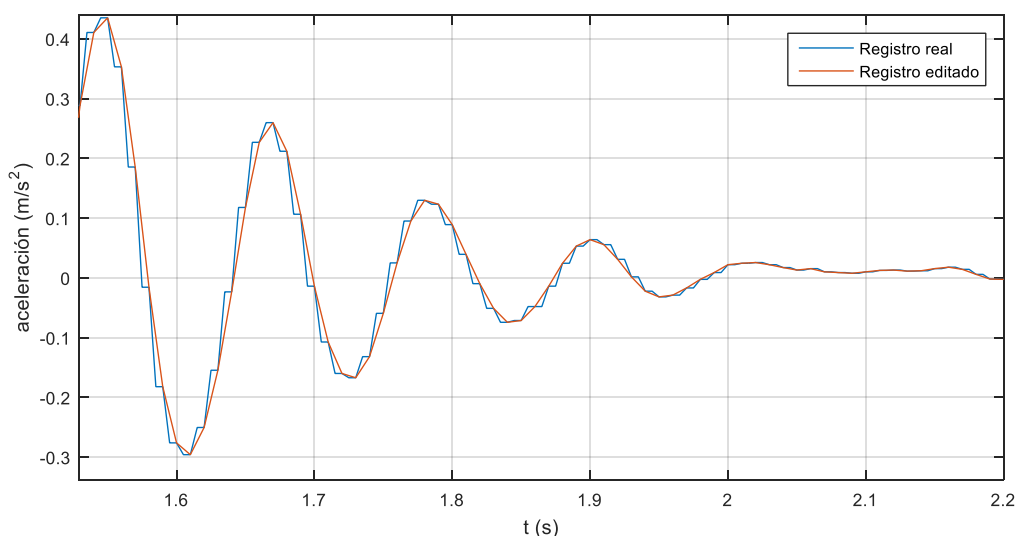


Figura 5.3. Fragmento de un registro de vibración libre con duplicación de datos.

5.4 Diferencia entre acelerómetros

Comparando la información obtenida por los acelerómetros colocados en la misma zona y para que sea independiente de la diferencia de posicionamiento comentada anteriormente de los sensores de las ruedas, se va a empezar este análisis con la información recogida por el acelerómetro del bastidor. En este caso, el acelerómetro de alta calidad se fijó sobre la placa de circuito impreso del acelerómetro económico por lo que las medidas de ambos deberían ser prácticamente idénticas. De esta comparación se han podido obtener distintas conclusiones que se comentarán a continuación.

En primer lugar, al comparar la información recogida en vibración forzada a bajas frecuencias se puede observar lo siguiente:

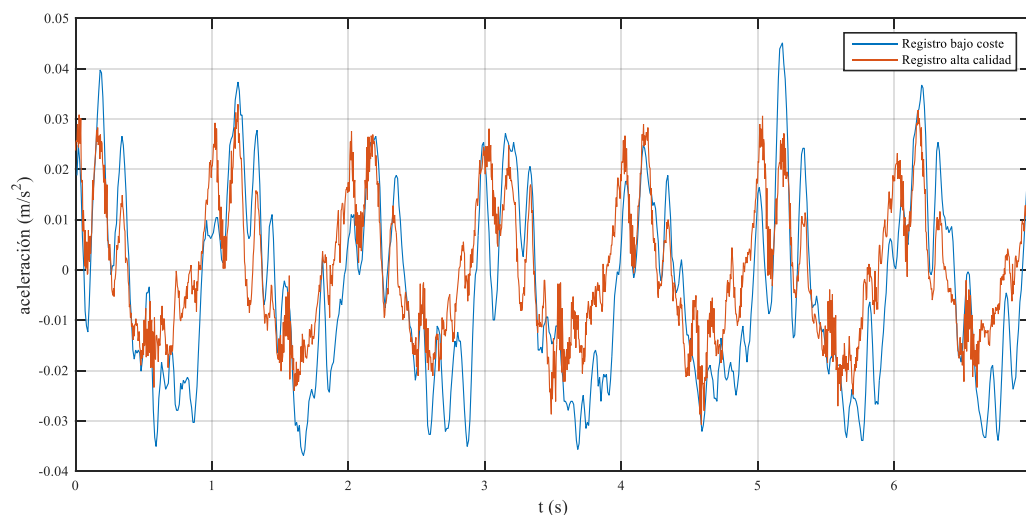


Figura 5.4. Vibración forzada, 1 Hz, acelerómetro 3.

Aunque la tónica general es similar, se puede ver como existen diferencias apreciables entre ambas representaciones. Debido al pequeño orden de magnitud del que se habla, se podría acarrear estos errores a la precisión de los dispositivos en las mediciones. Conforme se aumenta la frecuencia:

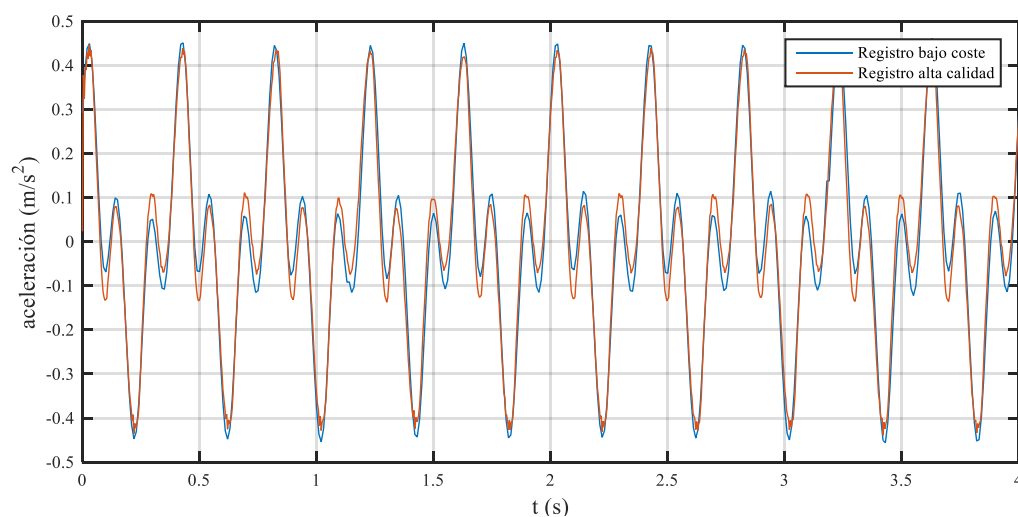


Figura 5.5. Vibración forzada, 2.5 Hz, acelerómetro 3.

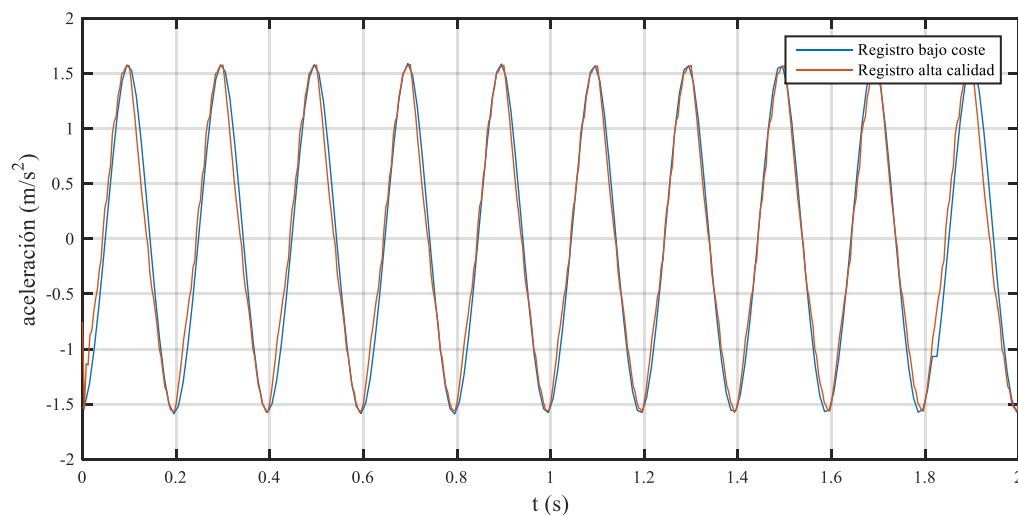


Figura 5.6. Vibración forzada, 5 Hz, acelerómetro 3.

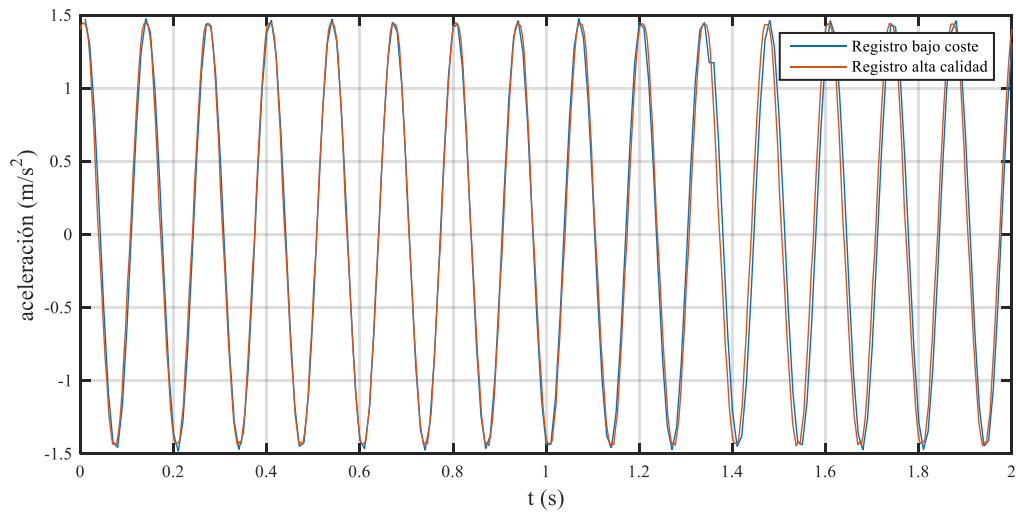


Figura 5.7. Vibración forzada, 7.5 Hz, acelerómetro 3.

En esta ocasión las dos gráficas se solapan en un amplio rango de tiempo, lo que nos confirma que las medidas de ambos acelerómetros son coherentes y se ajustan a lo que se podía esperar. Sin embargo, conforme la frecuencia de excitación crece por encima de 9 Hz:

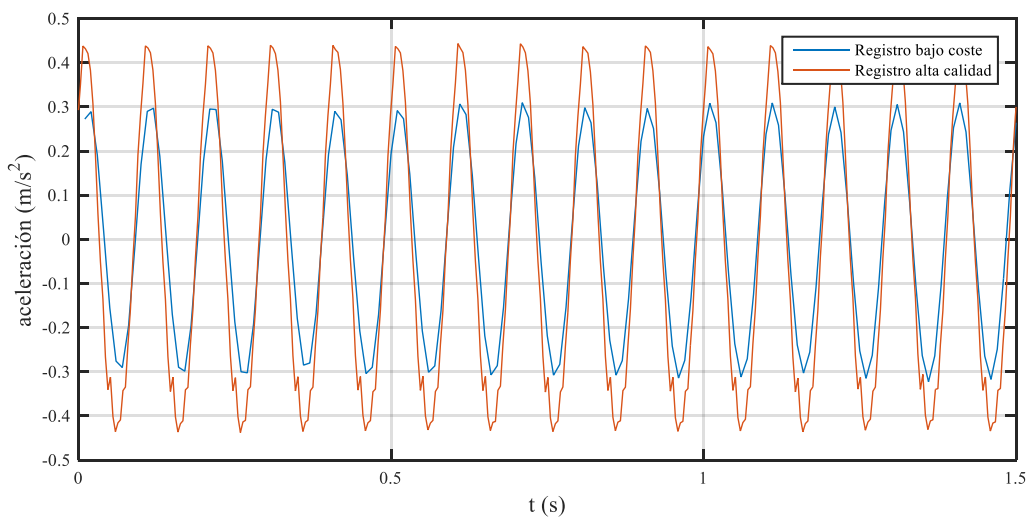


Figura 5.8. Vibración forzada, 10 Hz, acelerómetro 3.

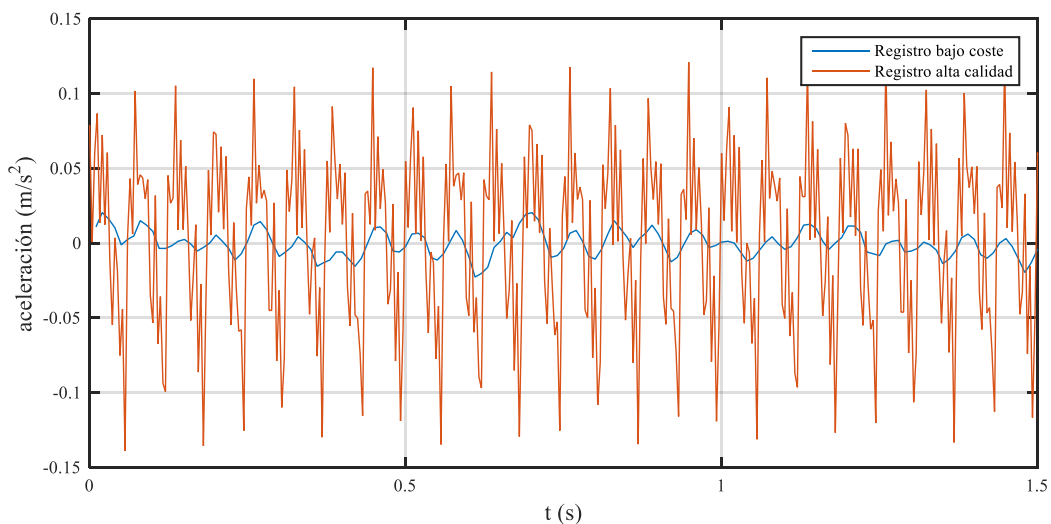


Figura 5.9. Vibración forzada, 16 Hz, acelerómetro 3.

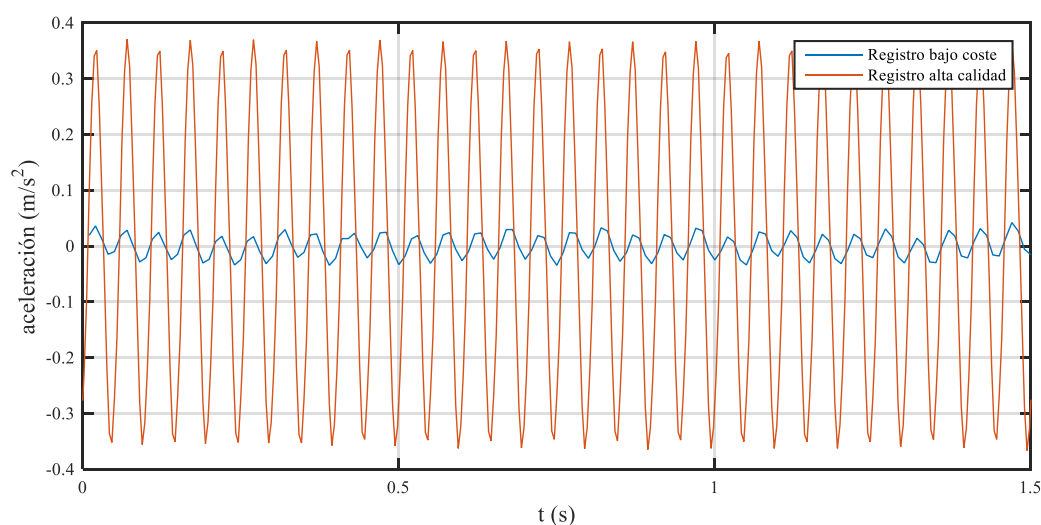


Figura 5.10. Vibración forzada, 20 Hz, acelerómetro 3.

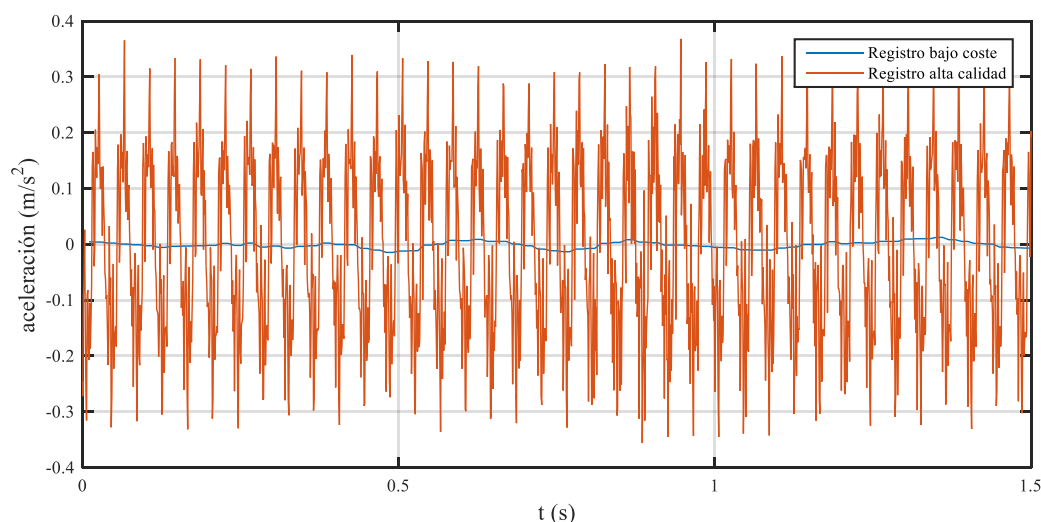


Figura 5.11. Vibración forzada, 25 Hz, acelerómetro 3.

Como ha quedado demostrado, al aumentar la frecuencia, los datos registrados tienden a distanciarse. Tanto es así que estos llegan a no poder ser identificables uno al otro. Esto puede deberse a un filtro de paso bajo incluido, por defecto, en el procesador de los acelerómetros, por lo que existe una pérdida de información debido a que no registran altas frecuencias de vibración que sí pueden observarse en el caso de los sensores de calidad. Previamente a la presentación de cualquier conclusión se va a comprobar el comportamiento para registros de otras posiciones de manera que se compruebe si esta pérdida de información es generalizada.

Para evitar que este documento se convierta en una sucesión infinita de gráficas similares, únicamente se van a mostrar algunas que se consideren más significativas para la explicación, aunque el análisis real se haya realizado con mucho más detalle para cada combinación de parámetros y posiciones.

Representando la respuesta del segundo sensor para unas frecuencias bajas se puede apreciar más claramente la pérdida de información que se detectaba anteriormente:

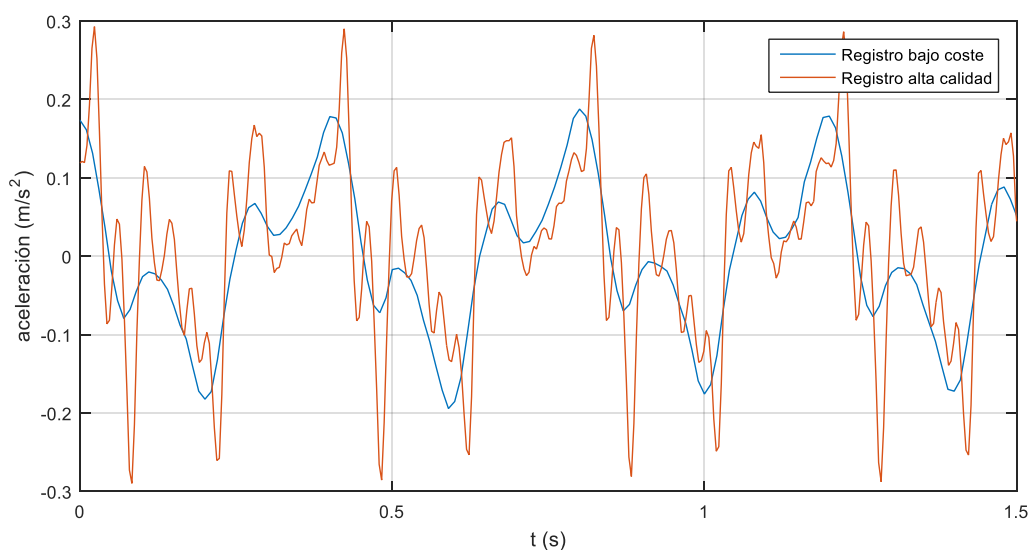


Figura 5.12. Vibración forzada, 2.5 Hz, acelerómetro 2.

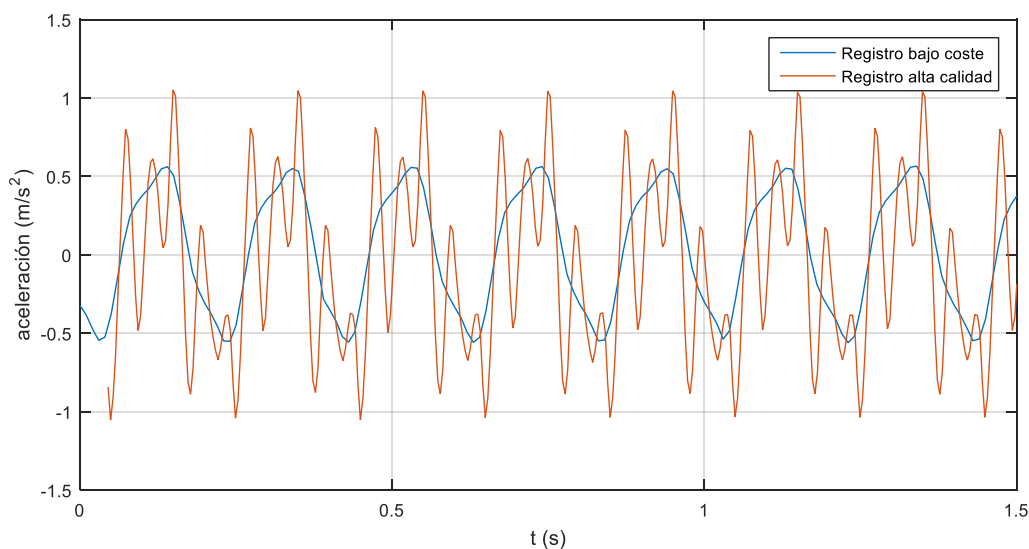


Figura 5.13. Vibración forzada, 5 Hz, acelerómetro 2.

Como es evidente, la información aportada por los acelerómetros económicos dista considerablemente de la proporcionada por el otro tipo de sensores. Se puede observar que la tendencia sí es buena puesto que, en cierto modo, el perfil seguido persigue las variaciones de baja frecuencia. Por este motivo y sabiendo que la pérdida de información comienza a ser apreciable al superar los 9 Hz de frecuencia, tras realizar algunas comparaciones, se ha llegado a la conclusión de que **los datos de estos sensores no son lo suficientemente adecuados como para basar nuestro análisis en ellos y por ello se descartan como parte de este proyecto.**

Este es el motivo por el cual conforme se aumentaba la frecuencia de excitación en los test, los datos capturados por los económicos distan en gran medida de los de calidad. Lo que se ha observado en la Figura 5.10, también se produce para el resto de estos. A modo representativo se incluyen algunos ejemplos de otras posiciones:

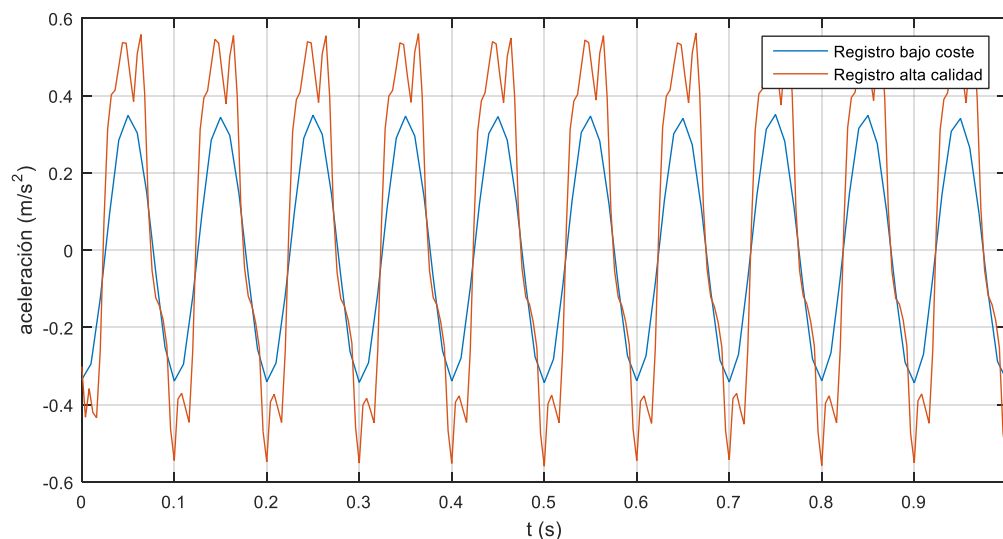


Figura 5.14. Vibración forzada, 10 Hz, acelerómetro 4.

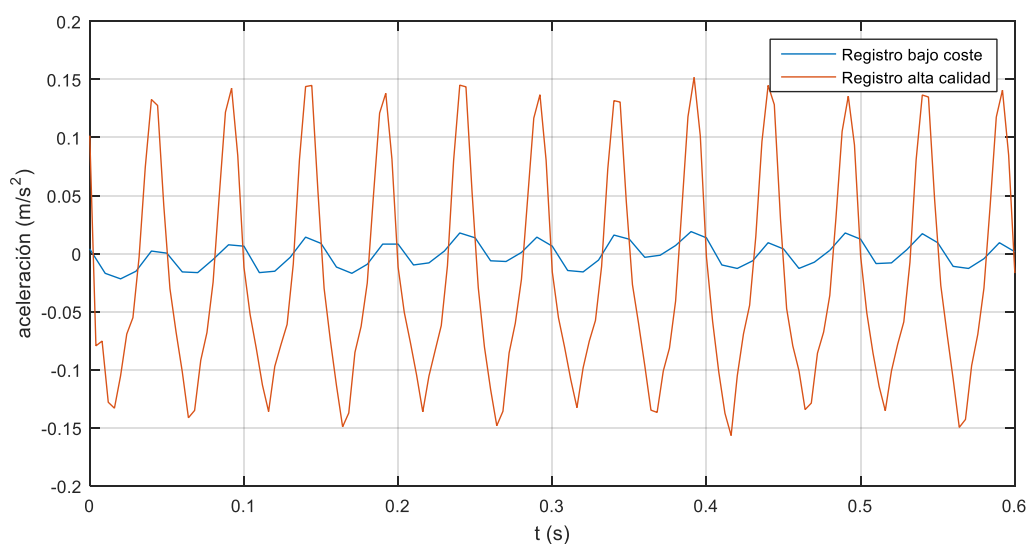


Figura 5.15. Vibración forzada, 20 Hz, acelerómetro 2.

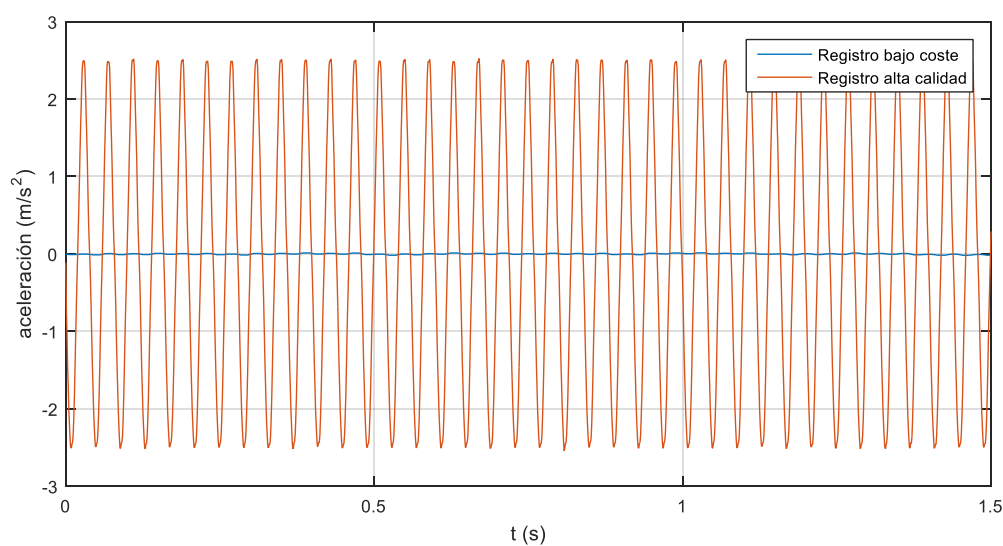


Figura 5.16. Vibración forzada, 25 Hz, acelerómetro 4.

En las Figura 5.14 a la Figura 5.16 se vuelve a apreciar cómo, conforme la frecuencia de excitación aumenta, la

concordancia entre los datos registrados por ambos equipos dista en mayor medida. Para justificar definitivamente esta decisión se va a representar la función de respuesta en frecuencia (FRF) de las respuestas en vibración forzada. Se aprovecha la ocasión para representar, también en las mismas gráficas, la FRF de los equipos profesionales. Primeramente, se han graficado en función de la posición, para comprobar si las funciones son similares entre los acelerómetros que se encuentran próximos:

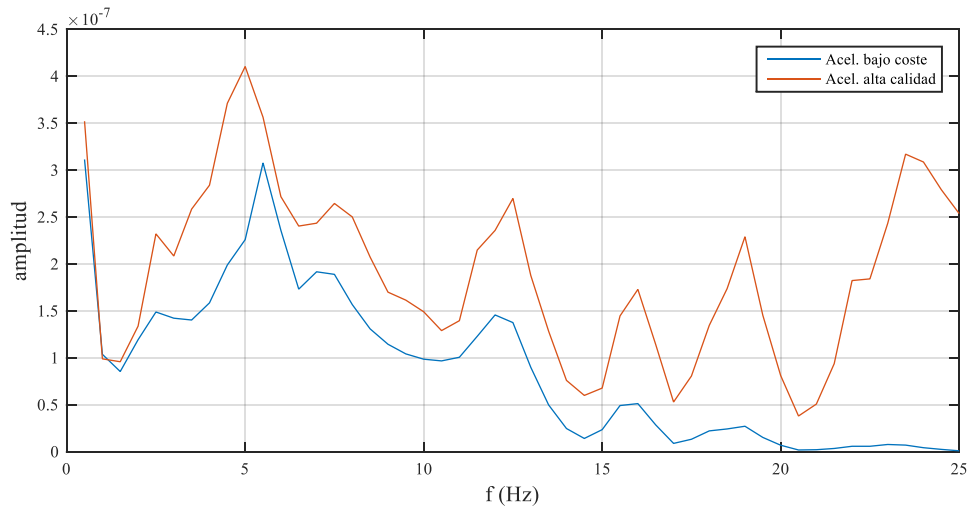


Figura 5.17. FRF de la posición 2.

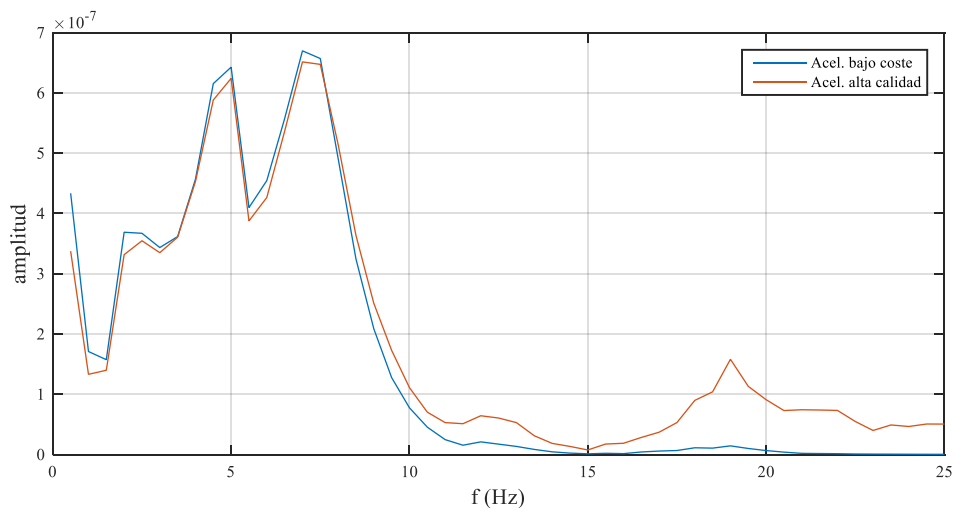


Figura 5.18. FRF de la posición 3.

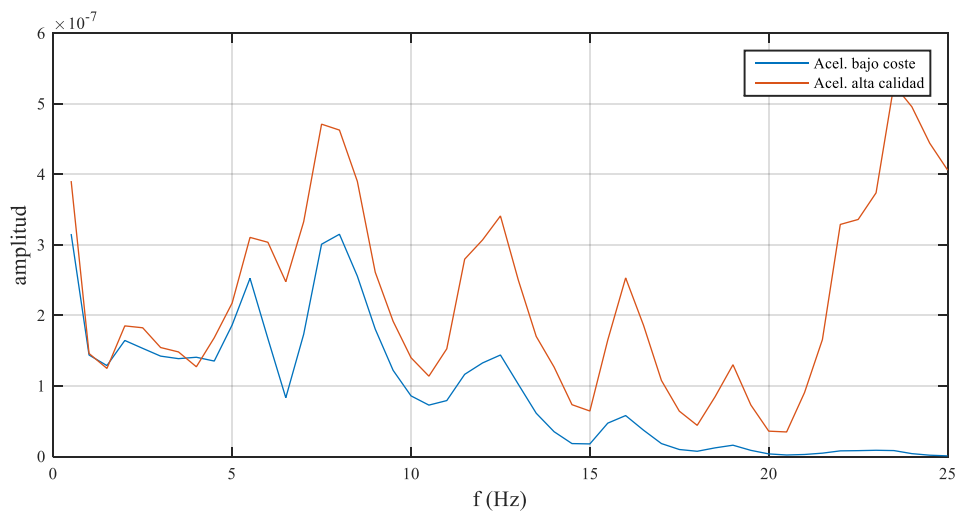


Figura 5.19. FRF de la posición 4.

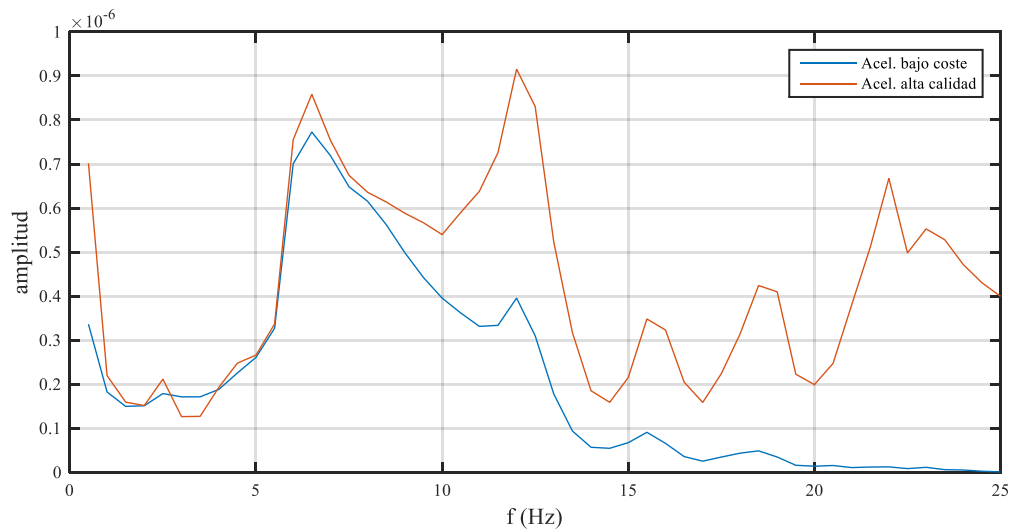


Figura 5.20. FRF de la posición 5.

Como se quería demostrar, el funcionamiento de los dispositivos económicos a altas frecuencias no arroja unos resultados fiables, por lo que definitivamente se obviará esta información de cara al análisis modal experimental que es objetivo principal de este proyecto. No se ha incluido la gráfica correspondiente a la primera posición puesto que los picos a fondo de escala que contienen la gran mayoría de los archivos falsean cualquier tipo de análisis que se haga con ellos. Sí que se puede representar para el acelerómetro 1 de alta calidad:

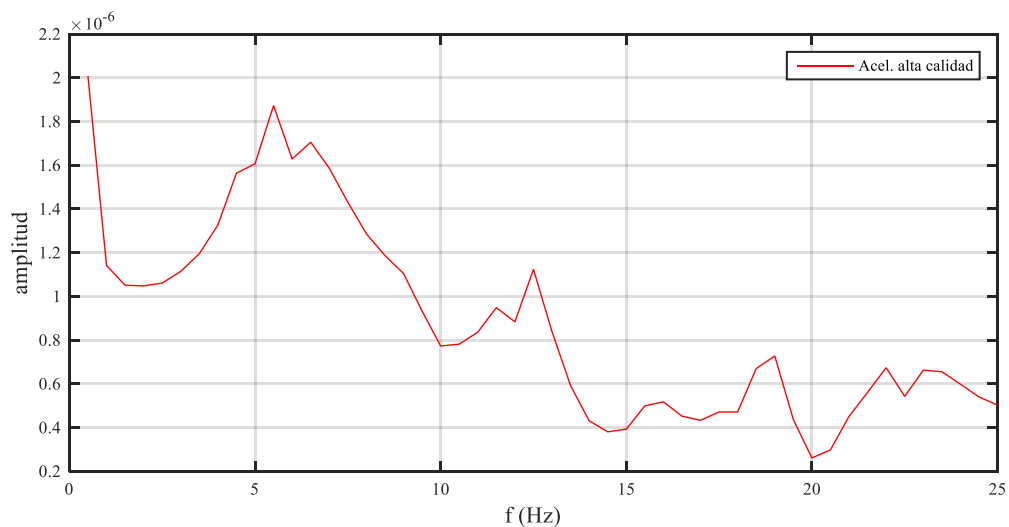


Figura 5.21. FRF de la posición 1, acel. alta calidad.

El interés de la Figura 5.21. es observar su orden de magnitud puesto que es superior a cualquiera de los otros anteriormente representados. Sabiendo que la posición 1 es donde se encontraba el actuador, este hecho parece ser coherente con lo que podía esperarse.

Para poder comparar con mayor facilidad la posición de los picos de las FRF, se pueden normalizar los resultados de manera que se asigne el valor unidad al máximo de cada gráfica y representando todas las del mismo tipo de sensores en la misma figura quedan:

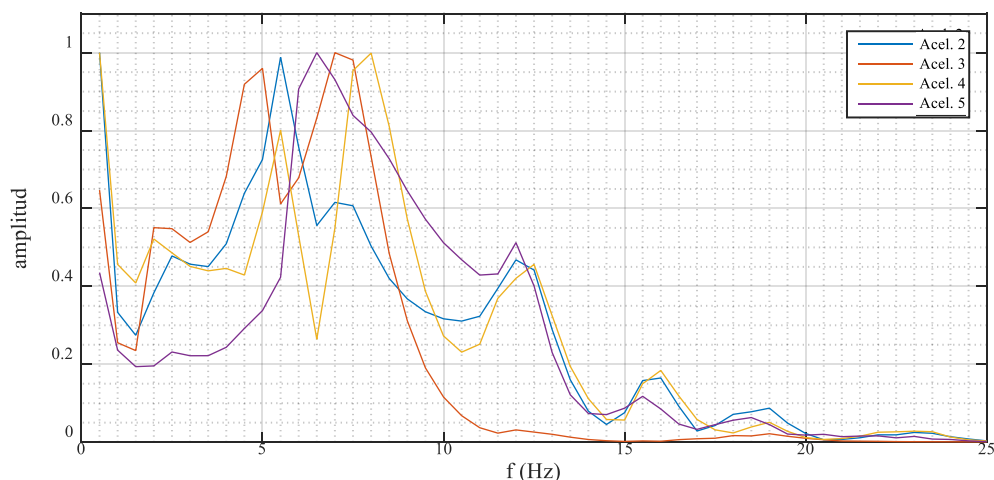


Figura 5.22. FRF económicas normalizadas con máximos=1, superpuestas.

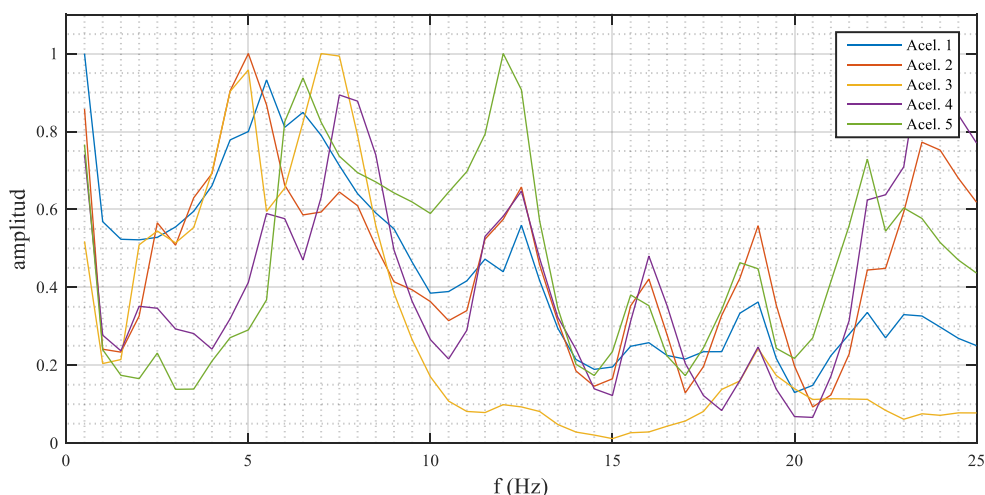


Figura 5.23. FRF alta calidad normalizadas con máximos=1, superpuestas.

A pesar de la atenuación sufrida para frecuencias altas, las Figuras anteriores desde la Figura 5.17, nos indican que los acelerómetros de bajo coste comienzan a proporcionarnos información errónea a partir de los 10 Hz, pero que la recogida antes de este límite parece acorde a lo captado por el otro tipo de sensores.

El siguiente análisis que se propone, para aprovechar la información descrita arriba, es un análisis mediante un algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier (FFT) [2] para la obtención de la transformada discreta de Fourier de los ensayos en vibración libre. Para la aplicación del algoritmo se hace uso de un programa Matlab[®], donde se ha elegido uno de los distintos escalones contenidos en la secuencia de datos y se ha seleccionado un intervalo que comienza unos instantes después del desplazamiento del pistón para que la información contenida se identifique con una vibración libre propiamente dicha, sin incluir el momento de aplicación de la fuerza. Además, se ha tomado un número de puntos de muestreo potencia de dos para que así el funcionamiento del algoritmo sea eficiente. A la hora de implementar el código se han planteado varias opciones por el hecho de que únicamente se va a analizar un rango de frecuencias comprendido entre 1 y 25 Hz. Por este motivo, se ha probado a aplicar un filtro de paso bajo de orden seis con frecuencia de corte 40 Hz que implica las siguientes diferencias:

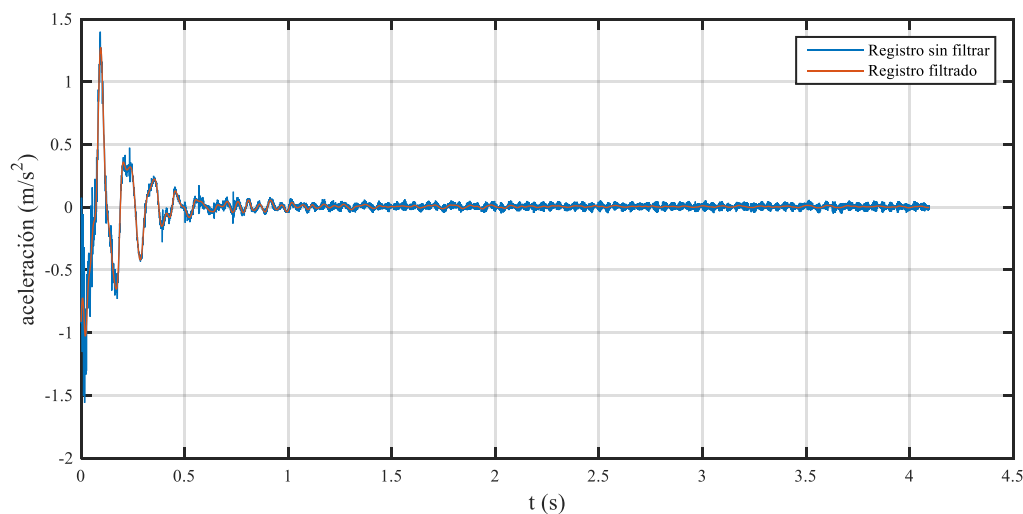


Figura 5.24. Vibración libre del acel. 3.

Con un poco más de detalle:

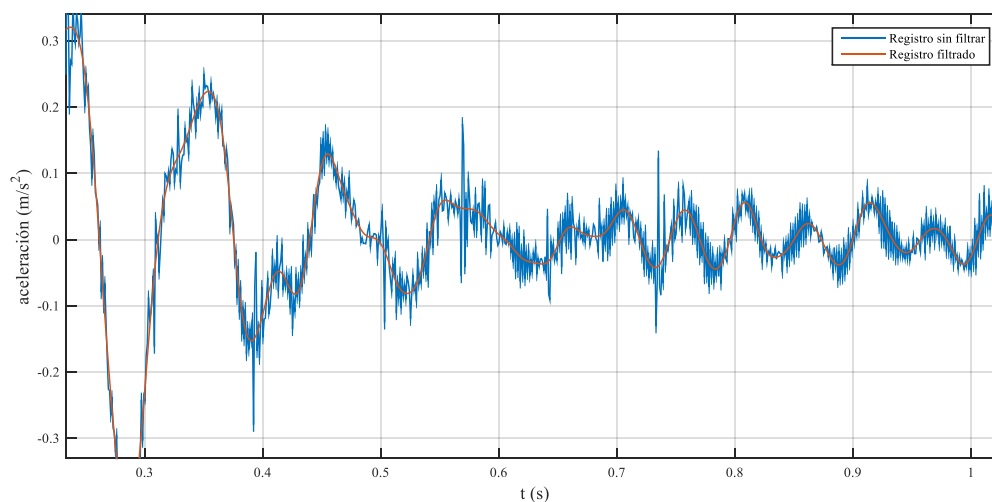


Figura 5.25. Detalle de la Figura 5.24.

Claramente el filtrado limpia enormemente la señal y elimina frecuencias inalcanzables para nuestro estudio, con lo que se consigue facilitar el funcionamiento y aumentar la clarividencia de los resultados que se obtengan a continuación.

Se puede apreciar en las Figura 5.26 que la influencia de este filtro es mínima en el rango de la FRF que ese está tratando. Como es evidente, se cuenta con una FRF para cada acelerómetro, de cada uno de los tres registros de vibración libre pero únicamente se incluyen tres ejemplos para justificar el uso del filtro. Si se normalizan los resultados y se representan en la misma figura la FRF de la vibración libre sin filtrar y filtrada se obtienen las siguientes figuras:

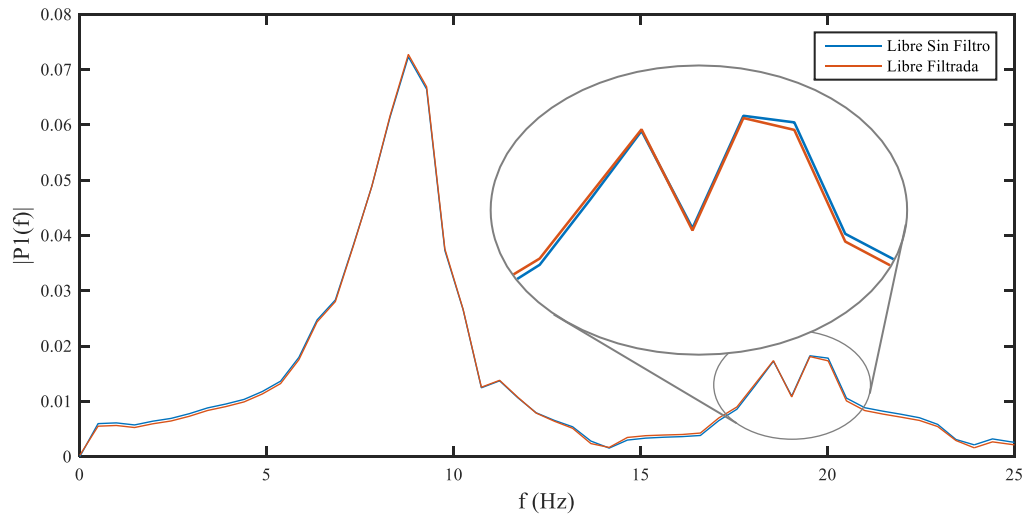


Figura 5.26. FRF Libre 1 mm, Acel. 3.

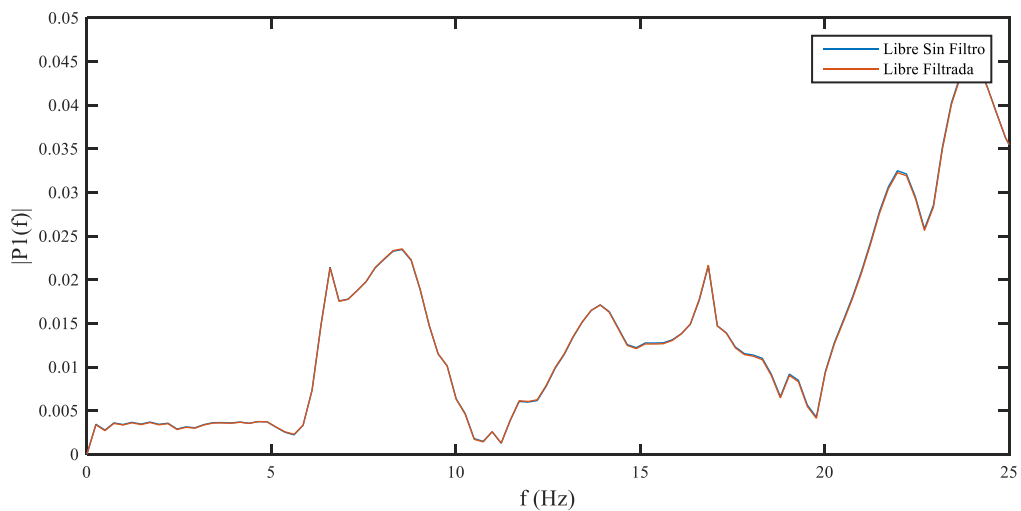


Figura 5.27. FRF Libre 2 mm, Acel. 4.

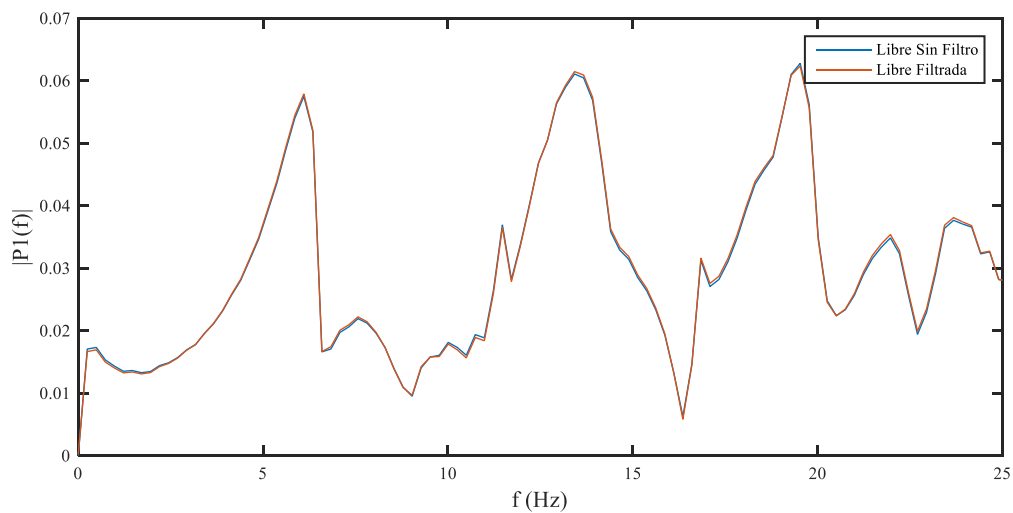


Figura 5.28. FRF Libre 3 mm, Acel. 1.

Como queda demostrado, la utilización del filtro no altera las FRF y consigue limpiar los registros del ruido que contienen. Como se había demostrado [7], el funcionamiento del método de Ibrahim se ve altamente condicionado por el ruido que contenga la señal. Por este motivo, para lo que sigue se considerarán como datos

de partida la información proporcionada por el filtro en cada caso.

Sería interesante la representación conjunta de todas las FRF, tanto de los ensayos en vibración forzada como libre, correspondientes a un mismo acelerómetro de manera que se pueda deducir con sencillez si existen similitudes entre ellas. Esto se ve en las

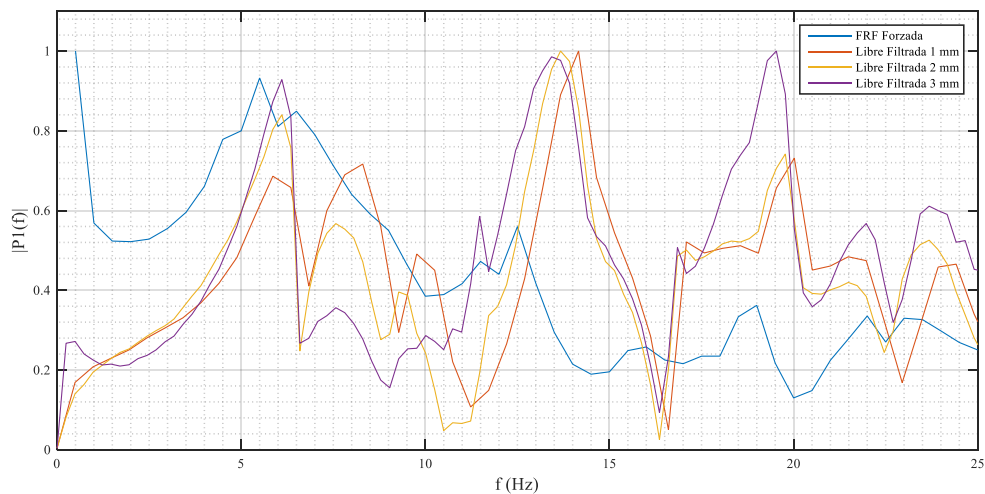


Figura 5.29. FRF de Vib. Libre acel. 1.

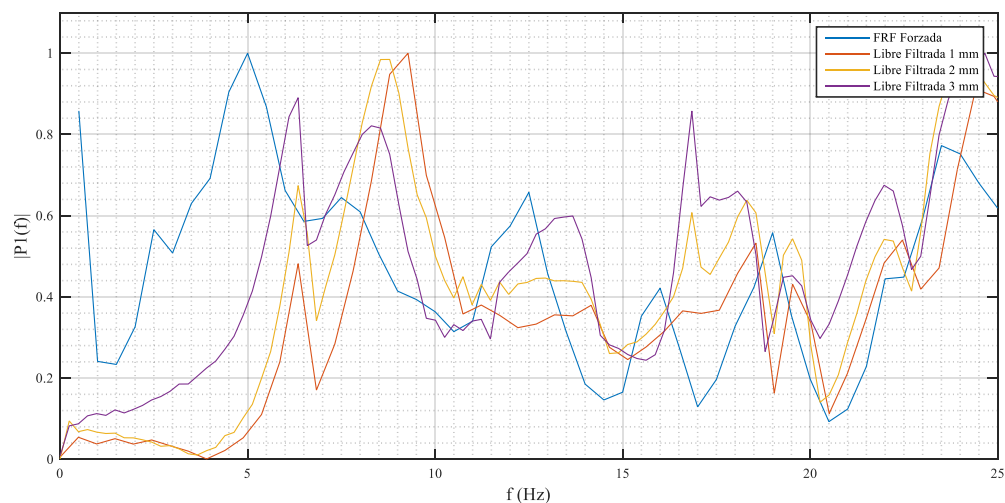


Figura 5.30. FRF de Vib. Libre acel. 2.

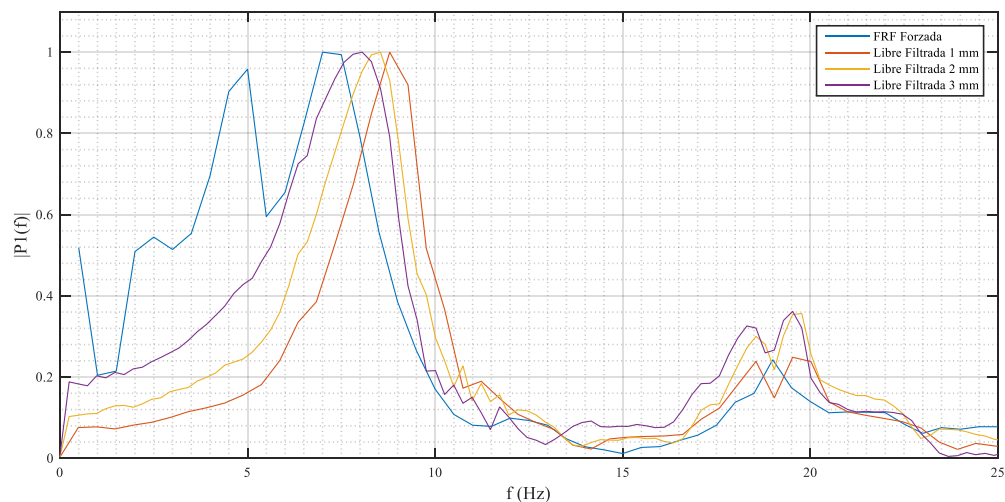


Figura 5.31. FRF de Vib. Libre acel. 3.

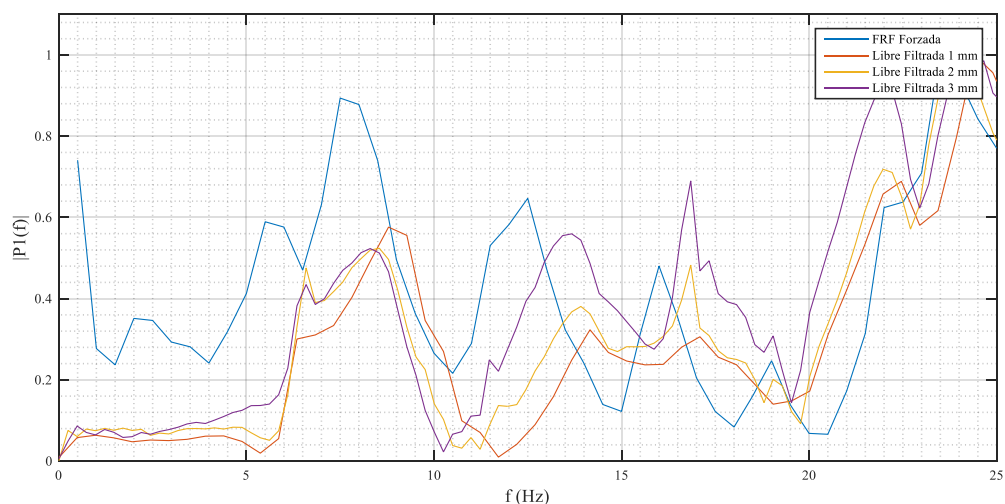


Figura 5.32. FRF de Vib. Libre acel. 4.

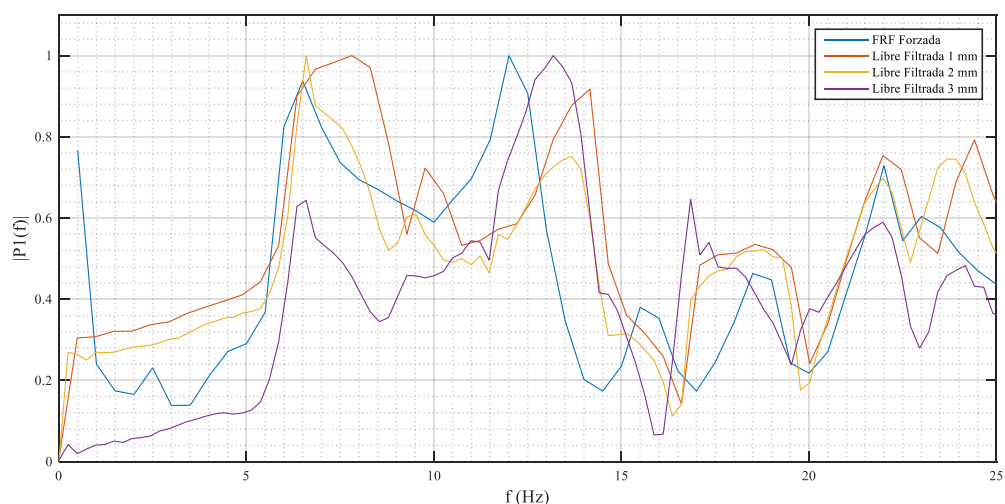


Figura 5.33. FRF de Vib. Libre acel. 5.

Aunque, como es evidente, no hay solapamiento entre las distintas funciones, sí que se pueden identificar ciertas frecuencias o rangos pequeños de frecuencias en las que se producen picos apreciables en prácticamente todos los ensayos, así como otras que, además, se repiten en varias de las figuras. En principio, serán estas las frecuencias que se pretenden encontrar cuando se realice el análisis modal experimental en el siguiente apartado. Si se recoge esta información se consigue la siguiente relación de frecuencias de interés:

Tabla 5-1. Frecuencias naturales amortiguadas aproximadas con FRF.

Acelerómetro	Frecuencia aproximada (Hz)						
1	6	8	13.5		19.5	22	24
2	6.5	8.5	13.5	16.5	19.5	22	24
3		8.5		18.5	19.5		
4		8.5	13.5	17		22	24
5	7	9.5	14	18		22	24

6 ANÁLISIS MODAL EXPERIMENTAL

Todo el procesado y estudio que se realiza en este proyecto de los datos obtenidos tras los ensayos se basa en la teoría de análisis modal. El análisis modal es un tipo de análisis muy utilizado en los últimos años para el estudio del comportamiento dinámico de sistema o estructuras de cierta complejidad. Aplicando algunos de los métodos característicos de este tipo de análisis se pretende conseguir una estimación de las propiedades del sistema, tales como frecuencias naturales o modos de vibración, etc. El modelo matemático fundamentado en los parámetros obtenidos es un modelo lineal que describe completamente el comportamiento del sistema o estructura. Con este, se puede simular la respuesta del sistema ante la acción de diferentes fuerzas y prever su comportamiento ante excitaciones típicas del funcionamiento, así como plantear distintas variaciones para adecuar el funcionamiento a lo deseado.

6.1 Introducción al Análisis Modal

Tras la primera puesta en conocimiento realizada en el Apartado 1.2 hay que distinguir entre:

6.1.1 Análisis modal teórico

Para el planteamiento de este tipo de análisis es necesario obtener las ecuaciones de movimiento del sistema bajo estudio y calcular la respuesta analítica de este bajo unas condiciones iniciales previamente establecidas o resolver el modelo por el método de los elementos finitos (muy usual) en caso de que su dificultad sea alta. Si se cuenta con las ecuaciones, se pueden calcular los parámetros del sistema resolviendo el problema de autovalores y autovectores correspondiente.

6.1.2 Análisis modal experimental

En este caso el análisis se basa fundamenta en cuatro pasos principalmente:

- Excitación del sistema.
- Medición mediante acelerómetros.
- Tratamiento digital.
- Análisis de las señales.

Es decir, una vez adquiridos y tratados los datos tras los ensayos se procede al análisis haciendo uso, en este proyecto, del método de Ibrahim, uno de los métodos más utilizados en análisis modal experimental.

La diferencia principal entre el modelo teórico y el experimental radica en la forma de obtener la respuesta del sistema bajo estudio. En el primero de los casos es una respuesta ideal obtenida de un cálculo analítico partiendo de las ecuaciones de movimiento del sistema o un modelo. En la variante experimental, la respuesta es registrada haciendo uso de acelerómetros colocados estratégicamente a lo largo del sistema que captan el comportamiento de este acorde a la excitación introducida. En este caso se puede incurrir a errores que se magnificarán cuanto menor calidad tengan los equipos de medida y el sistema de captación.

6.2 Método de Ibrahim (ITD)

El método de Ibrahim [8, 9, 10, 11, 12] es un método en el dominio del tiempo mediante el cual se pueden identificar los parámetros modales estructurales partiendo de cierta información experimental, resolviendo un problema de autovalores y autovectores complejos. Se pueden calcular los modos y polos de un sistema partiendo de la respuesta de este en vibración libre. Sus características son:

- Tiene la capacidad de obtener modos y polos en un solo análisis.
- Se puede aplicar el método a las respuestas tanto en aceleración, velocidad como posición.
- No es necesario conocer las ecuaciones que definen el sistema.
- La excitación no tiene que ser conocida, funciona para comportamiento en vibración libre. Por ello sólo es necesario contar con la respuesta del sistema unos instantes después de la eliminación de la fuerza excitadora.
- No requiere el uso de la transformada de Fourier (evitando leakage, aliasing, etc.)

A groso modo, la aplicación del método consiste en el montaje de una serie de matrices bloque de Hankel (matrices cuyos valores en cada antidiagonal son constantes) haciendo uso de los datos registrados de la vibración libre del sistema en varios instantes de tiempo. Repitiendo el proceso con un cierto desfase y posteriormente realizando operaciones con estas matrices finalmente se consigue un problema de autovalores y autovectores que se resuelve fácilmente y que nos proporciona los parámetros modales que se necesitan.

6.2.1 Procedimiento

En primer lugar, es necesario introducir una serie de conceptos básicos sobre vibraciones. Sabiendo que la respuesta de un sistema de N grados de libertad vibrando libremente puede obtenerse si se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (6.1)$$

Este puede transformarse en uno de primer orden añadiendo la ecuación:

$$m\dot{x} - m\dot{x} = 0 \quad (6.2)$$

que colocado de forma matricial y aplicando el cambio de coordenadas $y = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix}$ queda:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & m \\ m & c \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{pmatrix}}_{\dot{y}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -m & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}}_B \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix}}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

Es decir, las ecuaciones de movimiento ($2N$ ecuaciones) quedan en un sistema de primer orden:

$$A\dot{y} + By = 0, \quad y \in \mathbb{R}^{2N} \quad (6.4)$$

Para el cual existen soluciones de la forma:

$$y = \psi e^{\lambda t} \quad (6.5)$$

Una vez resuelto el problema de autovectores (modos), el sistema puede diagonalizarse y resolverse para cada una de las coordenadas modales:

$$\dot{z} - \lambda_r z_r = 0 \quad \rightarrow \quad z_r(t) = z_r(0)e^{\lambda_r t}, \quad (r = 1, 2, \dots, 2N) \quad (6.6)$$

Deshaciendo el cambio de coordenadas aplicado en (6.3) se obtiene la solución en coordenadas originales:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{r=1}^{2N} \boldsymbol{\psi}_{2r} \mathbf{z}_r(t) = \sum_{r=1}^{2N} \boldsymbol{\psi}_{2r} \mathbf{z}_r(0) e^{\lambda_r t} = \sum_{r=1}^{2N} \mathbf{z}_r e^{\lambda_r t} \quad (6.7)$$

Siendo \mathbf{z}_r el modo r ($\boldsymbol{\psi}_{2r}$) multiplicado por una constante (el valor inicial de la coordenada modal, $\mathbf{z}_r(0)$), entonces \mathbf{z}_r es también un modo de vibración. Consiguiendo así ensamblar el sistema matricial:

$$[\mathbf{x}(t_1) \quad \dots \quad \mathbf{x}(t_{2N})] = [\mathbf{z}_1 \quad \dots \quad \mathbf{z}_{2N}] \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t_1} & \dots & e^{\lambda_1 t_{2N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda_{2N} t_1} & \dots & e^{\lambda_{2N} t_{2N}} \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Que de forma compacta se escribe:

$$\mathbf{X} = \mathbf{Z} \boldsymbol{\Lambda} \quad (6.9)$$

Si se repite la misma operación con la respuesta desfasada temporalmente una cantidad Δt :

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \sum_{r=1}^{2N} \boldsymbol{\psi}_{2r} \mathbf{z}_r(t + \Delta t) = \sum_{r=1}^{2N} \boldsymbol{\psi}_{2r} \mathbf{z}_r(0) e^{\lambda_r(t + \Delta t)} = \sum_{r=1}^{2N} \mathbf{z}_r e^{\lambda_r(t + \Delta t)} \quad (6.10)$$

Que de forma matricial:

$$[\mathbf{x}(t_1 + \Delta t) \quad \dots \quad \mathbf{x}(t_{2N} + \Delta t)] = [\mathbf{z}_1 \quad \dots \quad \mathbf{z}_{2N}] \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t_1 + \Delta t)} & \dots & e^{\lambda_1(t_{2N} + \Delta t)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda_{2N}(t_1 + \Delta t)} & \dots & e^{\lambda_{2N}(t_{2N} + \Delta t)} \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

Siendo igual a:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{x}(t_1 + \Delta t) \quad \dots \quad \mathbf{x}(t_{2N} + \Delta t)] \\ &= [\mathbf{z}_1 e^{\lambda_1 \Delta t} \quad \dots \quad \mathbf{z}_{2N} e^{\lambda_{2N} \Delta t}] \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t_1} & \dots & e^{\lambda_1 t_{2N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda_{2N} t_1} & \dots & e^{\lambda_{2N} t_{2N}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.12)$$

De forma resumida se puede escribir:

$$\mathbf{X}_{\Delta t} = \bar{\mathbf{Z}} \boldsymbol{\Lambda} \quad (6.13)$$

De forma equivalente se puede plantear otro sistema para un desfase de $2\Delta t$:

$$\mathbf{x}(t + 2\Delta t) = \sum_{r=1}^{2N} \boldsymbol{\psi}_{2r} \mathbf{z}_r(t + 2\Delta t) = \sum_{r=1}^{2N} \boldsymbol{\psi}_{2r} \mathbf{z}_r(0) e^{\lambda_r(t + 2\Delta t)} = \sum_{r=1}^{2N} \mathbf{z}_r e^{\lambda_r(t + 2\Delta t)} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} & [\mathbf{x}(t_1 + 2\Delta t) \quad \dots \quad \mathbf{x}(t_{2N} + 2\Delta t)] \\ &= [\mathbf{z}_1 \quad \dots \quad \mathbf{z}_{2N}] \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t_1 + 2\Delta t)} & \dots & e^{\lambda_1(t_{2N} + 2\Delta t)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda_{2N}(t_1 + 2\Delta t)} & \dots & e^{\lambda_{2N}(t_{2N} + 2\Delta t)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Igual a:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{x}(t_1 + 2\Delta t) \quad \dots \quad \mathbf{x}(t_{2N} + 2\Delta t)] \\ &= [\mathbf{z}_1 e^{\lambda_1 2\Delta t} \quad \dots \quad \mathbf{z}_{2N} e^{\lambda_{2N} 2\Delta t}] \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t_1} & \dots & e^{\lambda_1 t_{2N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda_{2N} t_1} & \dots & e^{\lambda_{2N} t_{2N}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Y que también puede escribirse:

$$\mathbf{X}_{2\Delta t} = \bar{\bar{\mathbf{Z}}}\mathbf{\Lambda} \quad (6.17)$$

A continuación se ensamblan las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}_{\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \bar{\mathbf{Z}} \end{bmatrix} \mathbf{\Lambda} \quad \rightarrow \quad \mathbf{\chi} = \mathbf{\Theta}\mathbf{\Lambda} \quad (6.18)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\Delta t} \\ \mathbf{X}_{2\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}} \\ \bar{\bar{\mathbf{Z}}} \end{bmatrix} \mathbf{\Lambda} \quad \rightarrow \quad \bar{\mathbf{\chi}} = \bar{\mathbf{\Theta}}\mathbf{\Lambda} \quad (6.19)$$

Si se elimina $\mathbf{\Lambda}$ de las expresiones de arriba se consigue el problema de autovalores y autovectores que se había comentado anteriormente:

$$\bar{\mathbf{\chi}}\mathbf{\chi}^{-1}\mathbf{\Theta} = \bar{\mathbf{\Theta}} \quad \rightarrow \quad \bar{\mathbf{\chi}}\mathbf{\chi}^{-1}\mathbf{\Theta}_r = \bar{\mathbf{\Theta}}_r \quad \rightarrow \quad \bar{\mathbf{\chi}}\mathbf{\chi}^{-1}\mathbf{\Theta}_r = e^{\lambda_r \Delta t} \mathbf{\Theta}_r \quad (6.20)$$

Donde las N primeras componentes de cada $\mathbf{\Theta}_r$ coinciden con el modo r , es decir, con \mathbf{z}_r .

Para el caso que nos ocupa, sería preferible no limitar la lectura de datos a $2N$ instantes de tiempo. Si se toman los registros de tiempo de los ensayos y se sigue el procedimiento, se llega a unas matrices $\mathbf{\chi}$ y $\mathbf{\Lambda}$ que no serían cuadradas. Para solucionar este problema se multiplica por $\mathbf{\chi}^T$ como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{\chi}\mathbf{\chi}^T &= \mathbf{\Theta}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\chi}^T \\ \bar{\mathbf{\chi}}\mathbf{\chi}^T &= \bar{\mathbf{\Theta}}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\chi}^T \end{aligned} \quad \rightarrow \quad (\bar{\mathbf{\chi}}\mathbf{\chi}^T)(\mathbf{\chi}\mathbf{\chi}^T)^{-1}\mathbf{\Theta}_r = e^{\lambda_r \Delta t} \mathbf{\Theta}_r \quad (6.21)$$

Resolviendo este problema de autovalores y autovectores, despejando λ_r de los autovalores obtenidos y tomando las N primeras componentes de los autovectores se consiguen los parámetros deseados de nuestro sistema.

6.2.2 Factor de Confianza Modal (MCF)

Para los casos en los que no se cuenta con un gran número de acelerómetro con los que captar la información, puede darse el caso de que, tras aplicar el ITD, no se consiga el número de modos esperado. Para aumentar la cantidad de información con la que trabajar y aprovechando las características que tienen los ensayos en vibración libre, se pueden incluir una serie de posiciones de medición que se denominarán “ficticias”, de manera que se pueda multiplicar el número de registros y con ello obtener una mejor calidad y cantidad de resultados (modos en este caso). Para ello, tomando la información proporcionada por nuestros sensores y aplicando un retraso en el tiempo $\Delta\tau$, distinto al desfase tomado en la aplicación del ITD como tal, se crean estos puntos de medición ficticios mostrados a continuación:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}(t + \Delta\tau) = \sum_{r=1}^{2N} \mathbf{z}_r e^{\lambda_r(t+\Delta\tau)} = \sum_{r=1}^{2N} \mathbf{z}_r e^{\lambda_r \Delta\tau} e^{\lambda_r t} = \sum_{r=1}^{2N} \mathbf{z}'_r e^{\lambda_r t} \quad (6.22)$$

Si se redefine el vector \mathbf{X} como:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}'(t) \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

Se está duplicando el vector de partida por lo que se estaría calculando una respuesta para un sistema transformado con p posiciones reales y p posiciones ficticias. El sistema ha duplicado su tamaño, siendo relativamente equivalente a un ensayo realizado con el doble de sensores. Este procedimiento se puede repetir de manera que se extienda el sistema al triple, cuádruple, etc. de su tamaño original.

Dado que el orden de la nueva matriz $\bar{\mathbf{\chi}}\mathbf{\chi}^{-1}$ o $(\bar{\mathbf{\chi}}\mathbf{\chi}^T)(\mathbf{\chi}\mathbf{\chi}^T)^{-1}$ excederá el número de modos excitados en la respuesta medida, el método tiende a separar los modos estructurales de los modos numéricos relacionados con el ruido. Para cuantificar este efecto y descartar los modos que no tienen relación con nuestro análisis se calcula

el factor de confianza modal (Modal Confidence Factor, *MCF*) [10]. Si $z_{i(r)}$ es la componente i -ésima del modo r en una posición real, entonces, del desarrollo anterior, la componente i -ésima del modo r en la posición ficticia esperada desplazada en el tiempo $\Delta\tau$ es:

$$z_{i(r),expected} = z_{i(r)} e^{\lambda_r \Delta\tau} \quad (6.24)$$

Si el modo identificado es un modo estructural, entonces $z_{i(r),expected}$ debe ser igual a $z'_{i(r)}$, con lo que el coeficiente de confianza modal (*MCF*) [13] tomará un valor prácticamente como la unidad para cumplir:

$$z_{i(r),expected} = z'_{i(r)} * MCF \quad (6.25)$$

De la que se obtiene la ecuación para el cálculo del MCF (número complejo [12]):

$$MCF = \frac{z_{i(r),expected}}{z'_{i(r)}} \quad \text{ó} \quad MCF = \frac{z'_{i(r)}}{z_{i(r),expected}} \quad (6.26)$$

De manera que el valor absoluto del MCF sea inferior a la unidad. La parte real del MCF será 1 y su fase 0° para modos estructurales precisamente identificados.

6.3 Aplicación del método en modelos analíticos

La aplicación del método comenzó desconociendo la variante del MCF, por lo que la veracidad de los resultados no podía ser comprobada. Tras encontrar el análisis realizado en [14], se pudieron realizar ciertas comprobaciones duplicando y triplicando el número de estaciones, pero los resultados no llegaban a ser suficientemente convincentes. Sabiendo la gran influencia que tenía el ruido en el método según [7], era importante tener esto muy en cuenta puesto que nuestros datos, como ya se ha visto, estaban altamente contaminados por este. Para poder realizar algunas pruebas y saber con certeza cómo se comportaba el método se realizaron dos simulaciones.

6.3.1 Sistema 3 gdl

En primer lugar, se implementó un sistema simple de tres grados de libertad formados por tres masas deslizantes unidas dos a dos mediante sistemas muelle-amortiguador que, a su vez, las de los extremos se conectaban de la misma forma al sistema de referencia como se muestra en la Figura 6.1.

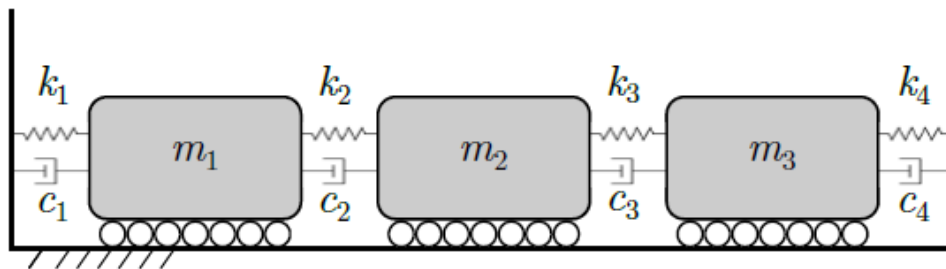


Figura 6.1. Sistema de masas con 3 gdl [7].

Las ecuaciones que caracterizan este sistema son (por simplicidad se omite incluir la referencia a la dependencia temporal de las variables $x(t)$):

$$m_2 \ddot{x}_2 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0 \quad (6.27)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - c_3 \dot{x}_3 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 - k_3 x_3 = 0 \quad (6.28)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 + (c_3 + c_4) \dot{x}_3 - c_3 \dot{x}_2 + (k_3 + k_4) x_3 - k_3 x_2 = 0 \quad (6.29)$$

Componiendo las siguientes matrices según [15]:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

Con:

$$m_1 = 1200 \text{ kg}, \quad m_2 = 3400 \text{ kg}, \quad m_3 = 1100 \text{ kg}, \quad c_1 = 3500 \frac{Ns}{m}, \quad c_2 = 2200 \frac{Ns}{m},$$

$$c_3 = 2500 \frac{Ns}{m}, \quad c_4 = 3500 \frac{Ns}{m}, \quad k_1 = 50000 \frac{N}{m}, \quad k_2 = 100000 \frac{N}{m}, \quad k_3 = 100000 \frac{N}{m}, \quad k_4 = 350000 \frac{N}{m}.$$

Transformando el sistema de 3 ecuaciones (N ecuaciones, tantas como gdl) de segundo orden en un sistema de $2N$ ecuaciones de primer orden [15] se puede resolverlo fácilmente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{m} \\ \mathbf{m} & \mathbf{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

donde se sustituye:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (6.34)$$

La solución de este sistema es de la forma:

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\psi} e^{\lambda t} \quad (6.35)$$

Que al ser sustituida en (6.34) representa un problema típico de autovalores. Puesto que se está trabajando con sistemas subamortiguados, los autovalores ($\lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_{di}$) son complejos, resultando siempre por pares de conjugados. Los autovectores asociados ($\boldsymbol{\psi}_i$) corresponden en parte con los modos de vibración.

La principal ventaja del uso de un sistema analítico como este es la posibilidad de conocer exactamente las frecuencias y modos que lo caracterizan, pudiendo compararlos con los obtenidos aplicando el ITD [10] a la respuesta del sistema en vibración libre obtenida analíticamente. A esta respuesta se le puede incluir una componente de ruido de manera sencilla con la que observar el comportamiento del método en este caso.

Si se resuelven las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento del sistema en vibración libre para unas condiciones iniciales arbitrarias. Existen dos resultados distintos a los que se le puede aplicar el ITD, la respuesta en posición y en aceleración. Se analizarán ambos casos, además del factor ruido. Todo esto se puede ver en las Figura 6.2 a la Figura 6.5.

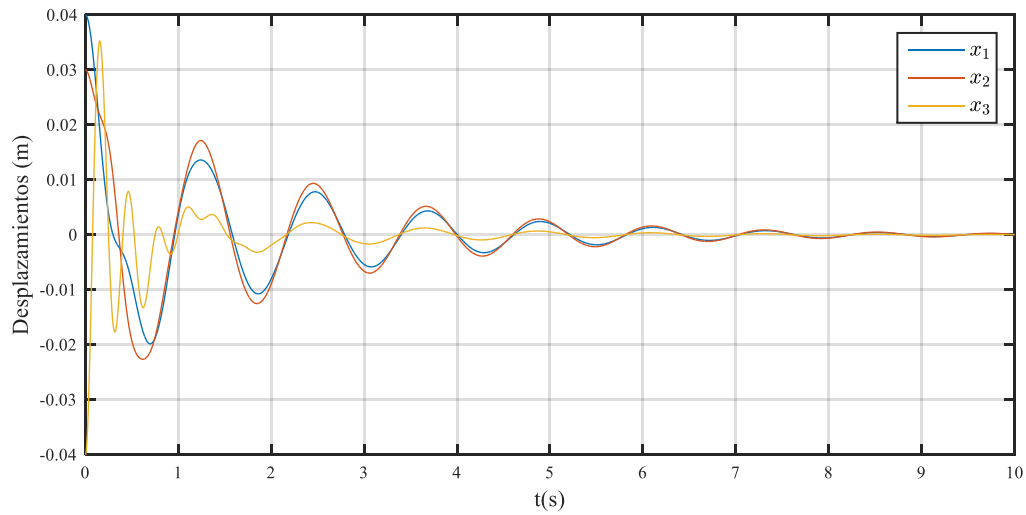


Figura 6.2. Respuesta en desplazamiento del sistema de 3 gdl.

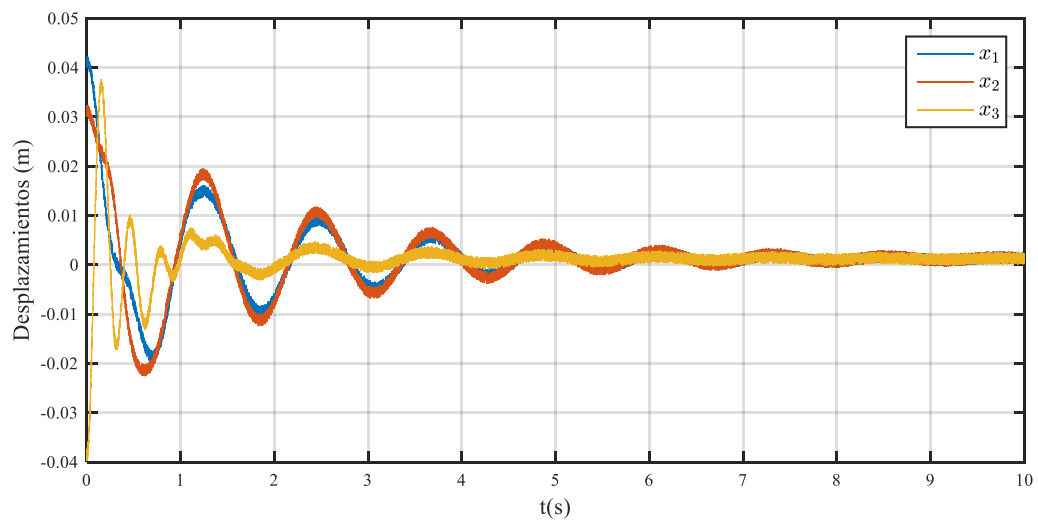


Figura 6.3. Respuesta en desplazamiento del sistema de 3 gdl con ruido.

Respuesta en aceleración:

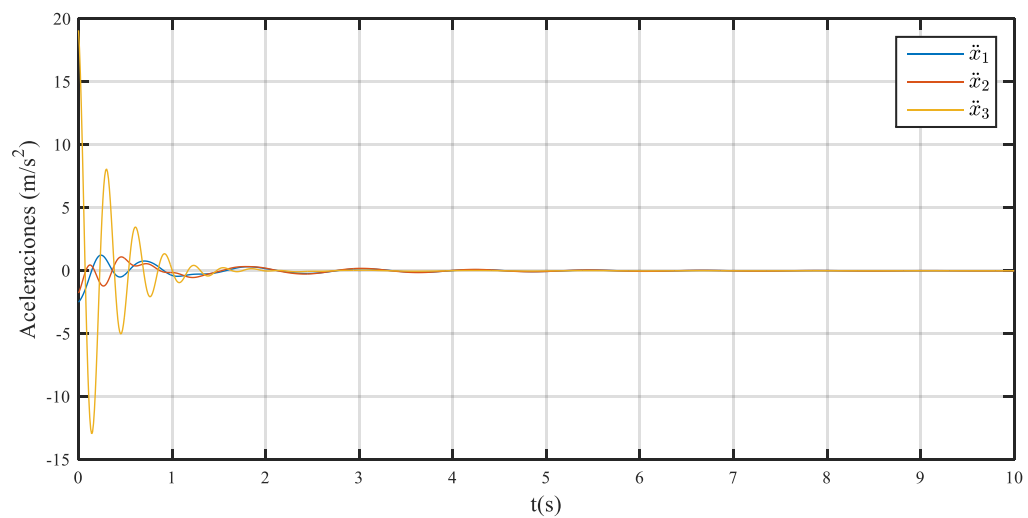


Figura 6.4. Respuesta en aceleración del sistema de 3 gdl.

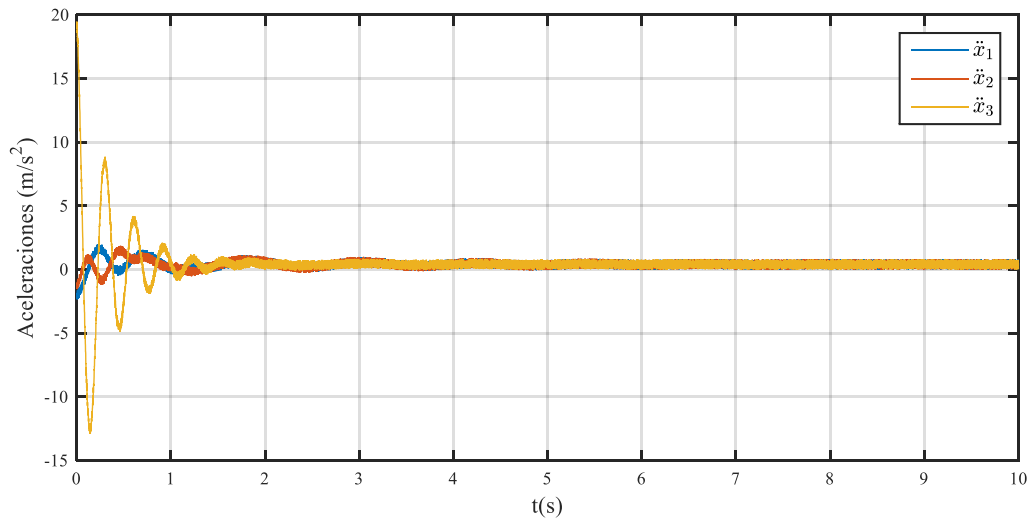


Figura 6.5. Respuesta en aceleración del sistema de 3 gdl con ruido.

Para la elección de los parámetros característicos del ITD como pueden ser Δt , $\Delta \tau$, $\Delta \tau_2$, etc. se ha realizado un barrido para un amplio rango de valores de estos y se ha elegido un valor correspondiente a una zona favorable. Para ello se han obtenido los autovalores de cada combinación, se ha calculado el módulo de cada autovalor conjugado (que corresponde con la frecuencia en rad/s) y se han representado en una misma gráfica para cada tamaño del sistema.

6.3.1.1 Resultados en desplazamiento

La intención es imitar el análisis realizado por Ibrahim [14], en nuestro caso, introduciendo el ruido en todos los registros. Se aplica el ITD a todas estas combinaciones de respuestas. Los siguientes pasos son duplicar y triplicar el número de puntos de medición siguiendo el procedimiento descrito en el apartado 6.2.2., de manera que se puedan comparar los resultados de cada uno de los procedimientos. En este primer contacto con los resultados se incluye una gran cantidad de información para poder justificar las conclusiones. Posteriormente se aportará exclusivamente la información de importancia para ser más concretos.

El barrido para la elección del valor de Δt muestra:

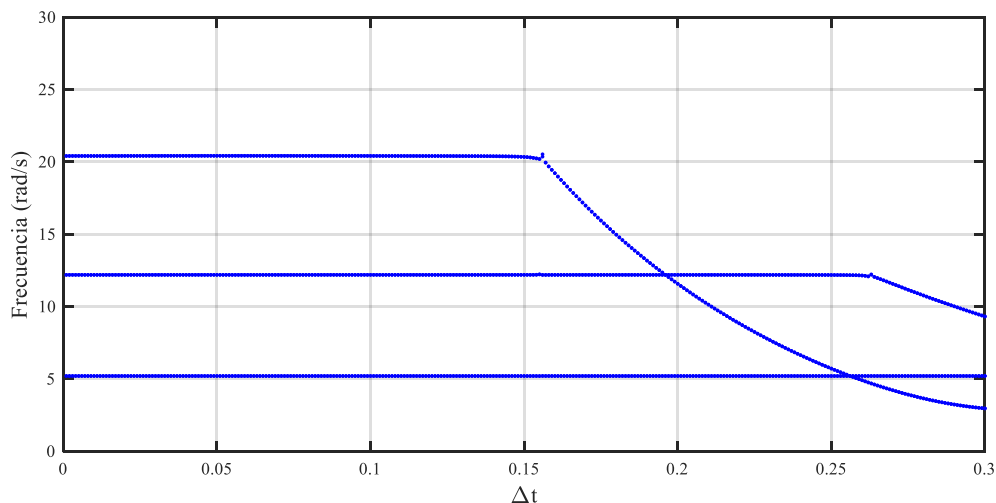


Figura 6.6. Barrido para Δt en desplazamiento sin ruido.

Del cual se ha elegido un valor de $\Delta t = 0.02$, no excesivamente grande para evitar problemas al aumentar posteriormente el tamaño del sistema. Este valor queda fijado para los dos siguientes barridos. Para elegir $\Delta \tau$:

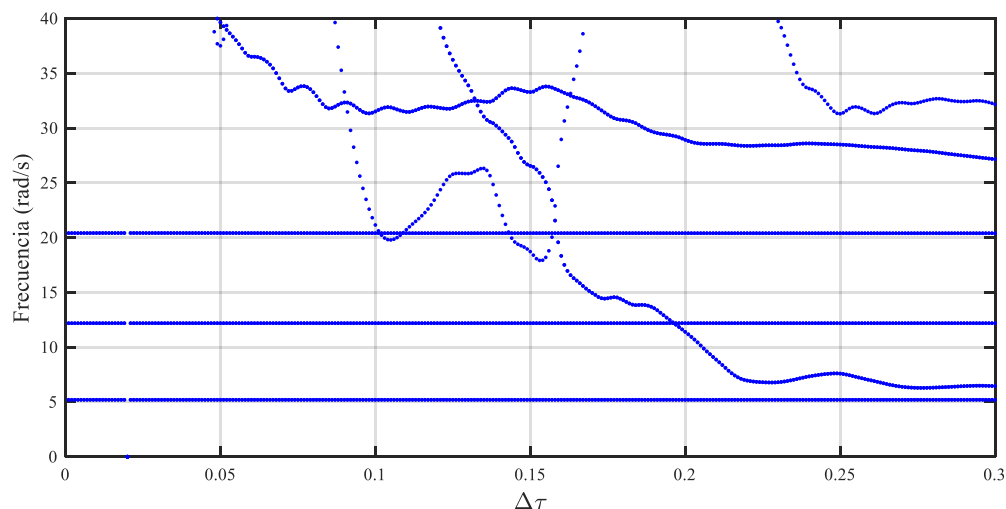


Figura 6.7. Barrido para $\Delta\tau$ en desplazamiento sin ruido.

Aquí ya es apreciable la influencia del método al crear ciertas frecuencias ficticias, aunque siguen siendo claramente diferenciables las que corresponden a nuestro sistema. De esta representación se toma un valor de $\Delta\tau = 0.033$, teniendo en cuenta que no sea demasiado próximo al valor de Δt elegido anteriormente e intentando la mayor variedad posible de desplazamientos en el tiempo (evitando valores múltiplos o similares). Fijando este también, de la misma forma se analiza el rango para $\Delta\tau_2$:

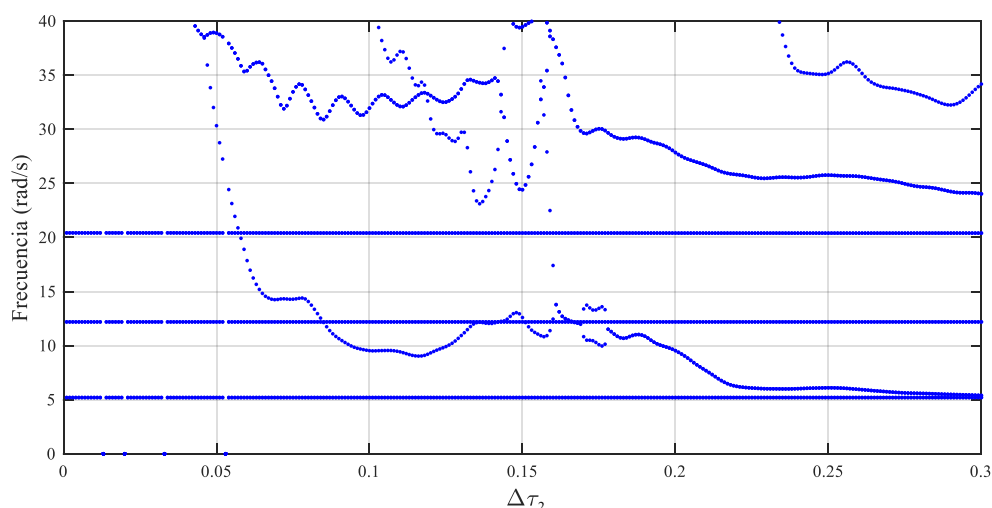


Figura 6.8. Barrido para $\Delta\tau$ en desplazamiento sin ruido.

De este último rango se toma $\Delta\tau_2 = 0.055$. Con estos valores y un paso de $h = 0.001$ (igual a los registros de los acelerómetros de calidad) se obtienen los siguientes resultados:

Tabla 6-1. Autovalores Sist. 3 gdl en desplazamiento sin ruido.

Teóricos	ITD	ITD con 2p estaciones	ITD con 3p estaciones
$-0.4887 \pm 5.176i$	$-0.48833 \pm 5.1757i$	$-0.48804 \pm 5.1761i$	$-0.48825 \pm 5.1758i$
$-2.4312 \pm 11.945i$	$-2.4296 \pm 11.945i$	$-2.4316 \pm 11.944i$	$-2.4305 \pm 11.945i$
$-2.8735 \pm 20.196i$	$-2.8703 \pm 20.207i$	$-2.8613 \pm 20.213i$	$-2.87 \pm 20.211i$
		$-17.8949 \pm 42.1274i$	-23.133

$-28.343 \pm 128.435i$	$-7.1601 \pm 36.416i$
$-65.522 + 129.416i$	-114.14
	$-38.401 \pm 116.28i$
	$-9.584 \pm 129.416i$
	$-25.462 \pm 136.82i$
	$-25.25 + 157.09i$
	$-71.025 + 157.09i$

Como se puede observar, si se comparan estos resultados con las características modales analíticas (primera columna) pueden considerarse idénticas. Esto nos da seguridad en el funcionamiento de los programas implementados. La primera conclusión que puede ser exportada de estos resultados es la gran fiabilidad del método cuando la señal analizada no está influenciada por el ruido típico de los sistemas de captación. Así también, se corrobora la aportación de información ficticia por parte del método, generando frecuencias no estructurales que no deben ser tenidas en cuenta. En este caso, al contar con los resultados analíticos se ha podido detectar con facilidad cuáles son estas componentes ficticias, pero se debe recordar que cuando se realice el Análisis Modal Experimental no se contará con resultados de referencia y se debe hacer uso del factor MCF para verificar la veracidad de las frecuencias estructurales calculadas.

Al repetir todo este procedimiento para la respuesta contaminada con ruido se generan estos resultados:

Los barridos muestran:

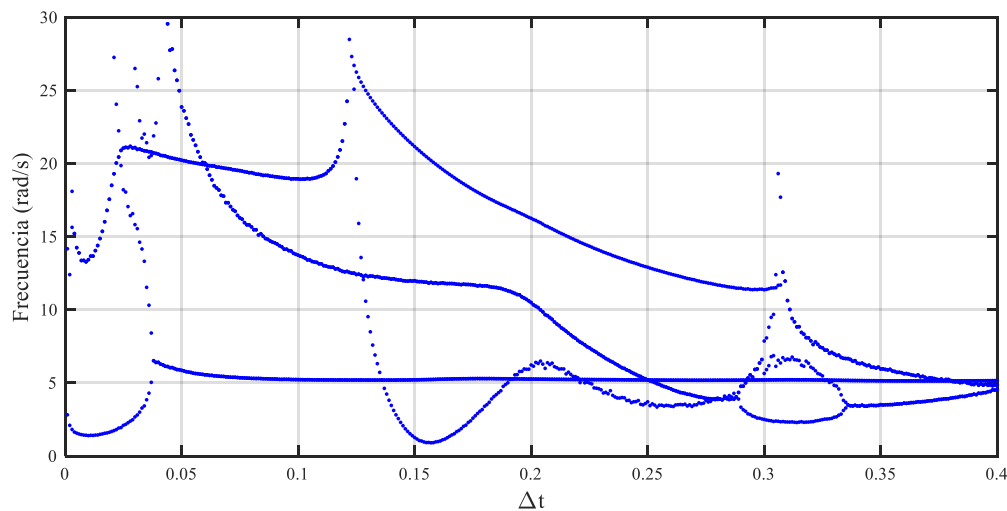


Figura 6.9. Barrido para Δt en desplazamiento con ruido.

Por lo que se tomará $\Delta t = 0.06$ para resolver el sistema original del ITD.

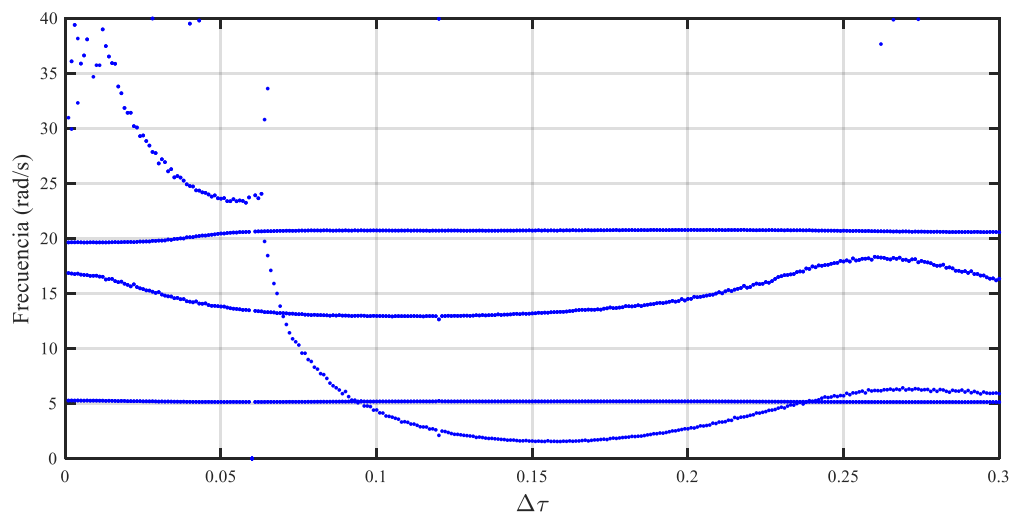


Figura 6.10. Barrido para $\Delta\tau$ en desplazamiento con ruido.

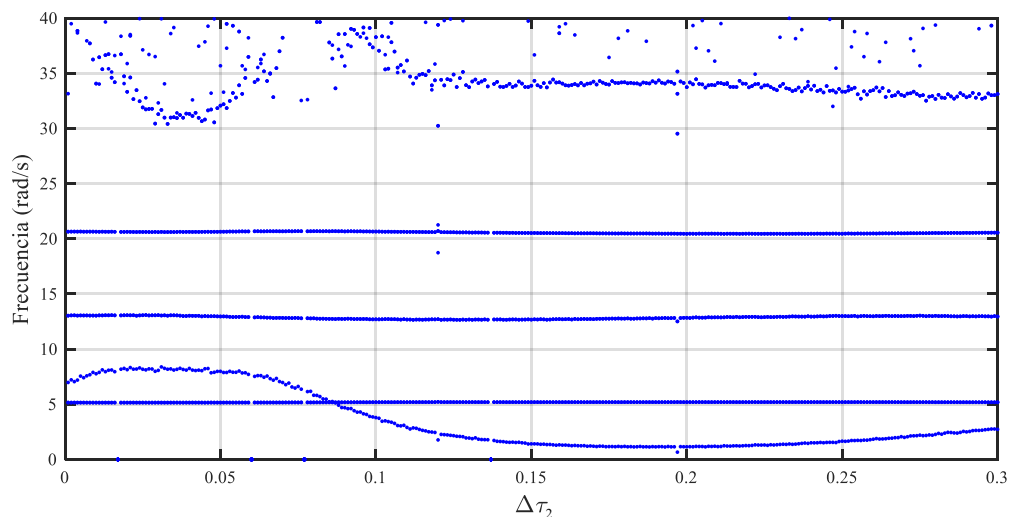


Figura 6.11. Barrido para $\Delta\tau_2$ en desplazamiento con ruido.

De los cuales se pueden tomar unos valores de $\Delta t = 0.06$, $\Delta\tau = 0.077$ y $\Delta\tau_2 = 0.14$. Con esta combinación, los autovalores obtenidos son:

Tabla 6-2. Autovalores Sist. 3 gdl en desplazamiento con ruido.

Teóricos	ITD	ITD con 2p estaciones	ITD con 3p estaciones
$-0.4887 \pm 5.176i$	$-2.145 \pm 5.1444i$	$-0.75575 \pm 5.0938i$	-1.6938
$-2.4312 \pm 11.945i$	$-10.359 \pm 16.44i$	-9.6857	$-0.58839 \pm 5.1647i$
$-2.8735 \pm 20.196i$	$-3.786 \pm 19.528i$	$-5.0648 \pm 12.147i$	$-4.1605 \pm 11.915i$
		$-3.6152 \pm 20.385i$	$-3.1954 \pm 20.291i$
		$-15.282 \pm 37.974i$	$-15.96 \pm 29.682i$
		$-15.454 \pm 41.164i$	-40.455
		$-36.621 \pm 52.36i$	$-12.895 \pm 40.033i$

$-13.423 \pm 43.464i$
$-37.287 \pm 26.39i$
$-14.936 + 52.36i$
$-35.685 + 52.36i$

Lo primero que se debe comentar de estos resultados es la gran diferencia encontrada con respecto a los de la Tabla 6-1. Como ya se tenía constancia [7], la influencia del ruido en el ITD es considerable, además, puesto que en el programa de Matlab® introduce este factor haciendo uso de un algoritmo de generación de datos aleatorios, también se ha podido observar que existen diferencias apreciables entre las distintas ejecuciones del programa.

En algunas ocasiones no es tan sencillo identificar los autovalores entre los distintos problemas (según el número de estaciones), hasta tal punto que llegan a ocultarse algunos de estos cuando el ruido aumenta su importancia. Esto nos indica que, en función del ruido que se incluya en nuestros registros, puede ocurrir que no se consiga que el método ITD nos proporcione toda la información que cabía esperar. También es significativa la mejora que se produce en los resultados conforme se aumenta el número de estaciones del sistema. En este caso es el primero de los autovalores estructurales el que mejor se aproxima al hacer crecer el tamaño del sistema, quedando muy próximo al teórico y con un MCF de:

Tabla 6-3. MCF del 1º autovalor, sist. 3 gdl, desplaz. con ruido.

ITD con 2p estaciones	ITD con 3p estaciones
$0.98786 \pm 0.0012034i$	$0.98758 \pm 0.0039015i$
$0.99963 \pm 0.011875i$	$0.99975 \mp 0.0086862i$
$0.97942 \pm 0.0020264i$	$0.97712 \pm 0.016464i$

Frente a un MCF del segundo autovalor estructural con una fiabilidad muy inferior:

Tabla 6-4. MCF del 2º autovalor, sist. 3 gdl, desplaz. con ruido.

ITD con 2p estaciones	ITD con 3p estaciones
$0.83206 \mp 0.039021i$	$0.82175 \mp 0.0037077i$
$0.73448 \mp 0.076655i$	$0.67561 \mp 0.0072544i$
$0.71614 \mp 0.29035i$	$0.21414 \pm 0.51348i$

Esto nos indica que la única frecuencia natural y el único modo fiable que puede obtenerse del análisis anterior es el correspondiente al primer autovalor. Para observar el comportamiento en una nueva situación, se ha propuesto modificar las condiciones iniciales elegidas para la generación de los datos a partir del modelo teórico. Con estas y unos parámetros $\Delta t = 0.075$, $\Delta \tau = 0.12$ y $\Delta \tau_2 = 0.135$:

Tabla 6-5. Autovalores Sist. 3 gdl en desplazamiento con ruido y otras c.i.

Teóricos	ITD	ITD con 2p estaciones	ITD con 3p estaciones
$-0.4887 \pm 5.176i$	-1.4558	-1.2819	-0.91731
$-2.4312 \pm 11.945i$	$-2.5091 \pm 12.196i$	$-2.6399 \pm 4.9458i$	$-2.002 \pm 5.0645i$

$-2.8735 \pm 20.196i$	$-16.819 \pm 3.4112i$	$-2.4663 \pm 11.956i$	$-2.4591 \pm 11.95i$
	$-28.557 + 41.888i$	$-8.2485 \pm 20.706i$	$-7.2147 \pm 20.67i$
		$-10.188 \pm 29.539i$	-25.703
		$-11.636 \pm 33.731i$	$-22.998 \pm 19.981i$
		$-12.176 + 41.888i$	$-9.5703 \pm 30.005i$
			$-11.51 \pm 33.766i$
			$-31.151 \pm 21.031i$
			$-11.278 + 41.888i$
			$-25.185 + 41.888i$

En esta ocasión, el primero de los autovalores no queda bien definido al igual que el tercero y es el segundo el que puede identificarse con mayor facilidad. El único MCF que nos garantiza confianza suficiente en el modo es el correspondiente a este segundo autovalor:

Tabla 6-6. MCF del 2º autovalor, sist. 3 gdl, desplaz. con ruido y otras c.i.

ITD con 2p estaciones	ITD con 3p estaciones
$0.98416 \pm 0.0012309i$	$0.98977 \pm 0.0015337i$
$0.96481 \mp 0.041346i$	$0.97787 \mp 0.022643i$
$0.98102 \pm 0.12571i$	$0.9580 \pm 0.087826i$

Esto nos lleva a otro punto importante de este desarrollo: elección de las condiciones iniciales a la hora de obtener las frecuencias naturales y los modos conlleva la obtención de ciertas frecuencias y el ocultamiento de otras, pudiéndose dar el caso de combinaciones que no arrojan ningún resultado de confianza. Puesto que nuestros ensayos únicamente pudieron realizarse excitando la rueda trasera derecha, esto nos limitará la cantidad de información que se puede obtener y, muy posiblemente, la falta de variedad en la excitación del monoplaza nos impida obtener tantas frecuencias como se podría desear. Esto es algo muy importante de cara al futuro análisis que se va a realizar.

A modo ilustrativo se van a incluir los modos normalizados correspondientes a este segundo autovalor estructural para cada análisis de esta última versión del sistema para poder observar que también son identificables entre ellos:

Tabla 6-7. Modo 2 Sist. 3 gdl en desplazamiento con ruido y otras c.i.

Teórico	ITD	ITD con 2p estaciones	ITD con 3p estaciones
-0.95734	-0.94634	-0.95718	-0.95754
$0.26692 \mp 0.0578i$	$0.28451 \mp 0.10152i$	$0.25532 \mp 0.067082i$	$0.25567 \mp 0.062511i$
$0.09420 \pm 0.00635i$	$0.10959 \mp 0.034339i$	$0.11878 \mp 0.0022604i$	$0.11758 \pm 0.003732i$

Como puede comprobarse, cuanto mayor es el sistema que se está resolviendo y, por ende, más cantidad de información se está utilizando, mejor es la aproximación del modo. Se ha comprobado que los modos correspondientes a los otros autovalores estructurales tienen valores del orden de los analíticos, aunque no lo

suficientemente adecuados como para obtener un MCF alto.

6.3.1.2 Resultados en aceleración

Un análisis idéntico al anterior puede realizarse para la respuesta en aceleración. Nuestro interés en esta respuesta es evidente puesto que los datos captados por nuestros sensores son aceleraciones. En principio, el uso el método ITD no debe verse condicionado por esta diferencia puesto que es aplicable tanto a los desplazamientos, velocidades como aceleraciones, pero se va a comprobar esto para nuestro sistema de 3 gdl.

Haciendo uso de las primeras condiciones iniciales, incluyendo el factor ruido, realizando los barridos oportunos y tomando como parámetros $\Delta t = 0.028$, $\Delta \tau = 0.072$ y $\Delta \tau_2 = 0.083$ los resultados quedan:

Tabla 6-8. Autovalores Sist. 3 gdl en aceleración con ruido.

Teóricos	ITD	ITD con 2p estaciones	ITD con 3p estaciones
$-0.4887 \pm 5.176i$	-1.0846	-0.96546	-0.68794
$-2.4312 \pm 11.945i$	$-2.8498 \pm 12.273i$	$-2.642 \pm 12.013i$	$-2.6197 \pm 11.982i$
$-2.8735 \pm 20.196i$	$-5.6016 \pm 21.268i$	$-6.9376 \pm 19.387i$	$-5.7671 \pm 19.291i$
	$-13.165 + 52.36i$	-66.645	-79.604
		$-27.771 \pm 81.987i$	$-64.064 \pm 48.814i$
		$-24.8 \pm 90.176i$	$-74.578 \pm 39.7i$
		$-25.035 + 104.72i$	$-27.421 \pm 82.438i$
		$-70.375 + 104.72i$	$-66.817 \pm 63.407i$
			$-25.084 \pm 89.535i$
			$-24.978 + 104.72i$
			$-81.976 + 104.72$

Queda comprobado el correcto funcionamiento del método para las aceleraciones. Para esta combinación de parámetros no existe rastro alguno del primer autovalor teórico, pero en cambio, los otros dos sí que son fácilmente identificables. Según el MCF, el autovalor de confianza sería también el segundo, al igual que en el análisis en desplazamiento con un factor:

Tabla 6-9. MCF del 2º autovalor, sist. 3 gdl, acel. con ruido.

ITD con 2p estaciones	ITD con 3p estaciones
$0.98304 \mp 0.0041648i$	$0.98868 \mp 0.0021266i$
$0.97724 \pm 0.066338i$	$0.98067 \pm 0.047i$
$0.95882 \pm 0.09182i$	$0.96857 \mp 0.08599i$

Frente a:

Tabla 6-10. MCF del 3° autovalor, sist. 3 gdl, acel. con ruido.

ITD con 2p estaciones	ITD con 3p estaciones
$0.53596 \pm 0.1051i$	$0.59888 \pm 0.030673i$
$0.3851 \mp 0.30325i$	$0.50191 \pm 0.28339i$
$0.71842 \pm 0.023393i$	$0.82658 \mp 0.0091979i$

De mucha menor calidad. Sus correspondientes modos se pueden observar a continuación:

Tabla 6-11. Modo 2 Sist. 3 gdl en aceleración con ruido.

Teóricos	ITD	ITD con 2p estaciones	ITD con 3p estaciones
$-0.95734i$	-0.95231	-0.94692	-0.95025
$0.26692 \mp 0.0578i$	$0.27081 \mp 0.066551i$	$0.27893 \mp 0.063064i$	$0.27728 \mp 0.063897i$
$0.09420 \pm 0.00635i$	$0.11857 \pm 0.035841i$	$0.1441 \pm 0.028175i$	$0.12658 \pm 0.0065283i$

Tabla 6-12. Modo 3 Sist. 3 gdl en aceleración con ruido.

Teóricos	ITD	ITD con 2p estaciones	ITD con 3p estaciones
$0.02139 \pm 0.01576i$	$-0.035788 \pm 0.040636i$	$-0.0014424 \pm 0.046773i$	$-0.019144 \pm 0.038498i$
$-0.08583 \mp 0.02301i$	$-0.1502 \mp 0.07285i$	$-0.08292 \mp 0.11208i$	$-0.078324 \mp 0.080856i$
0.99569	0.98448	0.98913	0.99271

En este tercer modo es más apreciable que la proximidad del autovalor es peor, aunque se sigue produciendo la mejora de los resultados conforme incrementa el número de estaciones.

6.3.2 Sistema 7 gdl

Una vez realizado el análisis para un sistema simple de tres grados de libertad como el visto en el apartado anterior, cabe proceder a aumentar la complejidad del sistema teórico, aproximándonos lo máximo posible al sistema real bajo estudio. Este sistema al que se hace referencia es un modelo dinámico de un vehículo con siete grados de libertad basado en [16] como el mostrado en la imagen:

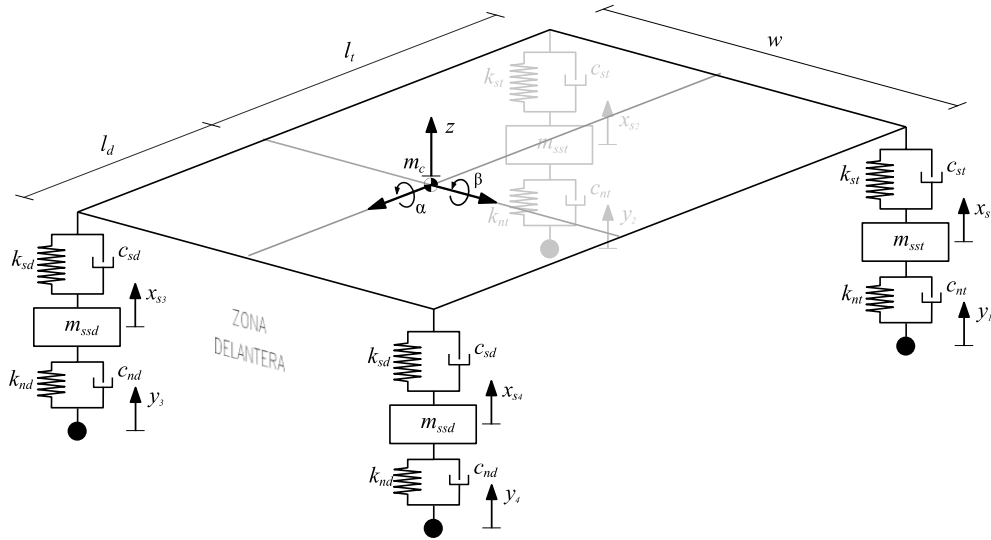


Figura 6.12. Modelo de un vehículo (7 gdl).

Los siete grados de libertad corresponden con:

Alabeo o Roll – α

Cabeceo o Pitch – β

Desplazamiento vertical del cdg del chasis – z

Desp. vertical, masa semisuspendida de la

$\left\{ \begin{array}{l} \text{rueda trasera izquierda} - x_{s1} \\ \text{rueda trasera derecha} - x_{s2} \\ \text{rueda delantera derecha} - x_{s3} \\ \text{rueda delantera izquierda} - x_{s4} \end{array} \right.$

Quedando:

$$\mathbf{q} = [\alpha \ \beta \ z \ x_{s1} \ x_{s2} \ x_{s3} \ x_{s4}]' \quad (6.36)$$

A la hora de obtener las ecuaciones de movimiento que rigen el sistema, se han supuesto pequeños desplazamientos de manera que, al calcular los desplazamientos de los puntos de unión de la suspensión con el chasis, no se tuviesen en cuenta los movimientos horizontales debidos a los giros. De tal manera, el cálculo de estos desplazamientos se ha realizado siguiendo el esquema de la Figura 6.13.

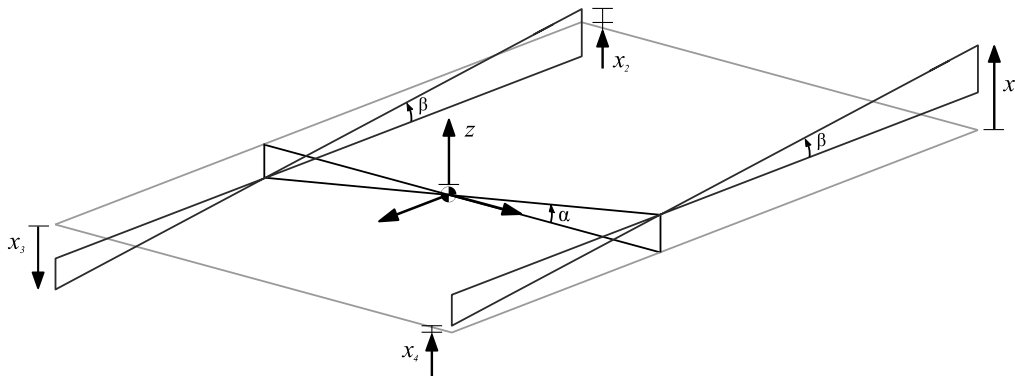


Figura 6.13. Esquema de simplificación de desplazamientos.

Quedando, ya linealizadas:

$$x_1 = z + \frac{w}{2}\alpha + l_t\beta \quad (6.37)$$

$$x_2 = z - \frac{w}{2}\alpha + l_t\beta \quad (6.38)$$

$$x_3 = z - \frac{w}{2}\alpha - l_d\beta \quad (6.39)$$

$$x_4 = z + \frac{w}{2}\alpha - l_d\beta \quad (6.40)$$

Así, las ecuaciones diferenciales ya linealizadas que caracterizan el vehículo quedan:

$$\begin{aligned} -m_c\ddot{z} + k_{st}\left(x_{s1} - z - \frac{w}{2}\alpha - l_t\beta\right) \\ + c_{st}\left(\dot{x}_{s1} - \dot{z} - \frac{w}{2}\dot{\alpha} - l_t\dot{\beta}\right) + k_{st}\left(x_{s2} - z + \frac{w}{2}\alpha - l_t\beta\right) \\ + c_{st}\left(\dot{x}_{s2} - \dot{z} + \frac{w}{2}\dot{\alpha} - l_t\dot{\beta}\right) + k_{sd}\left(x_{s3} - z + \frac{w}{2}\alpha + l_d\beta\right) \\ + c_{sd}\left(\dot{x}_{s3} - \dot{z} + \frac{w}{2}\dot{\alpha} + l_d\dot{\beta}\right) + k_{sd}\left(x_{s4} - z - \frac{w}{2}\alpha + l_d\beta\right) \\ + c_{sd}\left(\dot{x}_{s4} - \dot{z} - \frac{w}{2}\dot{\alpha} + l_d\dot{\beta}\right) = 0 \end{aligned} \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned} -I_\alpha\ddot{\alpha} + \left[k_{st}\left(x_{s1} - z - \frac{w}{2}\alpha - l_t\beta\right) \right. \\ + c_{st}\left(\dot{x}_{s1} - \dot{z} - \frac{w}{2}\dot{\alpha} - l_t\dot{\beta}\right) - k_{st}\left(x_{s2} - z + \frac{w}{2}\alpha - l_t\beta\right) \\ - c_{st}\left(\dot{x}_{s2} - \dot{z} + \frac{w}{2}\dot{\alpha} - l_t\dot{\beta}\right) - k_{sd}\left(x_{s3} - z + \frac{w}{2}\alpha + l_d\beta\right) \\ - c_{sd}\left(\dot{x}_{s3} - \dot{z} + \frac{w}{2}\dot{\alpha} + l_d\dot{\beta}\right) + k_{sd}\left(x_{s4} - z - \frac{w}{2}\alpha + l_d\beta\right) \\ \left. + c_{sd}\left(\dot{x}_{s4} - \dot{z} - \frac{w}{2}\dot{\alpha} + l_d\dot{\beta}\right)\right]\frac{w}{2} = 0 \end{aligned} \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned} -I_\beta\ddot{\beta} + \left[k_{st}\left(x_{s1} - z - \frac{w}{2}\alpha - l_t\beta\right) \right. \\ + c_{st}\left(\dot{x}_{s1} - \dot{z} - \frac{w}{2}\dot{\alpha} - l_t\dot{\beta}\right) + k_{st}\left(x_{s2} - z + \frac{w}{2}\alpha - l_t\beta\right) \\ + c_{st}\left(\dot{x}_{s2} - \dot{z} + \frac{w}{2}\dot{\alpha} - l_t\dot{\beta}\right)\left]l_t \right. \\ - \left[k_{sd}\left(x_{s3} - z + \frac{w}{2}\alpha + l_d\beta\right) \right. \\ + c_{sd}\left(\dot{x}_{s3} - \dot{z} + \frac{w}{2}\dot{\alpha} + l_d\dot{\beta}\right) + k_{sd}\left(x_{s4} - z - \frac{w}{2}\alpha + l_d\beta\right) \\ \left. + c_{sd}\left(\dot{x}_{s4} - \dot{z} - \frac{w}{2}\dot{\alpha} + l_d\dot{\beta}\right)\right]l_d = 0 \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$\begin{aligned} -m_{st}\ddot{x}_{s1} + k_{st}\left(z + \frac{w}{2}\alpha + l_t\beta - x_{s1}\right) + c_{st}\left(\dot{z} + \frac{w}{2}\dot{\alpha} + l_t\dot{\beta} - \dot{x}_{s1}\right) \\ + k_{nt}(y_1 - x_{s1}) + c_{nt}(\dot{y}_1 - \dot{x}_{s1}) = 0 \end{aligned} \quad (6.44)$$

$$\begin{aligned} -m_{st}\ddot{x}_{s2} + k_{st}\left(z - \frac{w}{2}\alpha + l_t\beta - x_{s2}\right) + c_{st}\left(\dot{z} - \frac{w}{2}\dot{\alpha} + l_t\dot{\beta} - \dot{x}_{s2}\right) \\ + k_{nt}(y_2 - x_{s2}) + c_{nt}(\dot{y}_2 - \dot{x}_{s2}) = 0 \end{aligned} \quad (6.45)$$

$$-m_{sd}\ddot{x}_{s3} + k_{sd}\left(z - \frac{w}{2}\alpha - l_d\beta - x_{s3}\right) + c_{sd}\left(\dot{z} - \frac{w}{2}\dot{\alpha} - l_d\dot{\beta} - \dot{x}_{s3}\right) + k_{nd}(y_3 - x_{s3}) + c_{nd}(\dot{y}_3 - \dot{x}_{s3}) = 0 \quad (6.46)$$

$$-m_{sd}\ddot{x}_{s4} + k_{sd}\left(z + \frac{w}{2}\alpha - l_d\beta - x_{s4}\right) + c_{sd}\left(\dot{z} + \frac{w}{2}\dot{\alpha} - l_d\dot{\beta} - \dot{x}_{s4}\right) + k_{nd}(y_4 - x_{s4}) + c_{nd}(\dot{y}_4 - \dot{x}_{s4}) = 0 \quad (6.47)$$

Como se puede observar, no se han incluido los términos del peso puesto que se considera que nos encontramos en el punto de equilibrio estático y ya se han eliminado todos estos términos constantes.

Partiendo de estas ecuaciones se ensamblan las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento [15] con las que proceder de igual forma que en el apartado anterior. Para no alargar en exceso la muestra de los resultados y teniendo en cuenta el gran tamaño de los sistemas que van a ser resueltos en esta ocasión, únicamente se expondrán los autovalores y modos de importancia, justificadamente.

Las propiedades del vehículo se han seleccionado de un libro de referencia [17], aunque se ha visto conveniente modificar algunos parámetros puesto que el comportamiento tendía a ser muy poco subamortiguado, debido a unos valores de amortiguamiento altos. Aunque es obvio que esto es conveniente para el correcto funcionamiento del vehículo, para nuestro análisis es contraproducente. Con estos cambios se consigue una información de mejor calidad de cara al análisis que se quiere desarrollar.

Estas propiedades son:

$$\begin{aligned} m_c &= 1000 \text{ kg}, m_{ssd} = 45 \text{ kg}, m_{sst} = 55 \text{ kg}, \\ k_{sd} &= 10700 \frac{\text{N}}{\text{m}}, k_{st} = 11000 \frac{\text{N}}{\text{m}}, k_{nd} = k_{nt} = 44000 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \\ c_{sd} &= 300 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}, c_{st} = 360 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}, c_{nd} = c_{nt} = 0, \\ I_\alpha &= 560 \text{ kg m}^2, I_\beta = 1875 \text{ kg m}^2, w = 1.51 \text{ m}, l_d = 1.2 \text{ m} \text{ y } l_t = 1.4 \text{ m}. \end{aligned}$$

Se va a mostrar la respuesta en desplazamiento y aceleración, aunque el estudio se realizará partiendo de esta segunda únicamente puesto que, como se ha demostrado en el apartado anterior, los resultados son similares y así se aproximan en mayor medida al ensayo real. Para unas condiciones iniciales en forma de escalón que introducen un desplazamiento en la base de las cuatro ruedas (y_1, y_2, y_3, y_4) con distinta amplitud y sentido, el modelo responde (antes de incluir el ruido, por claridad):

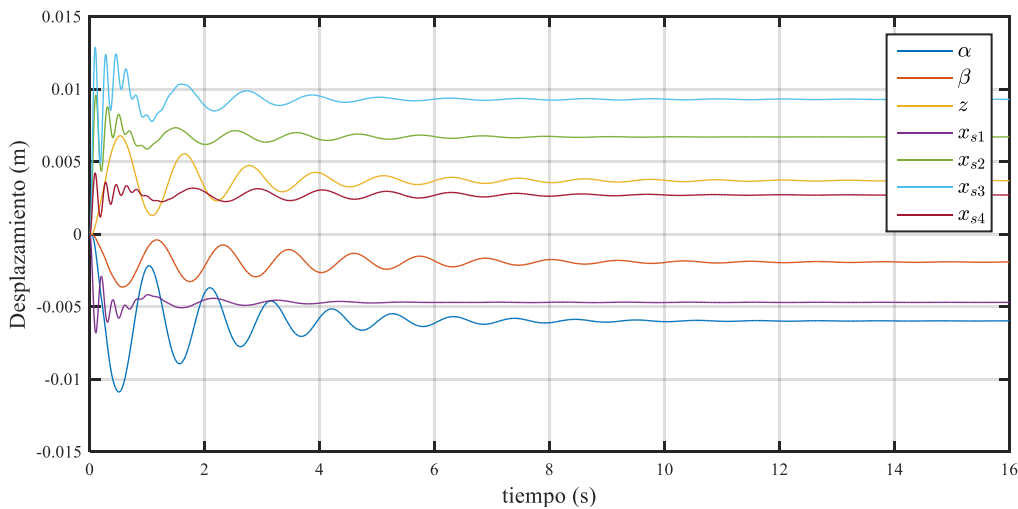


Figura 6.14. Desplazamientos Modelo Coche 7 gdl.

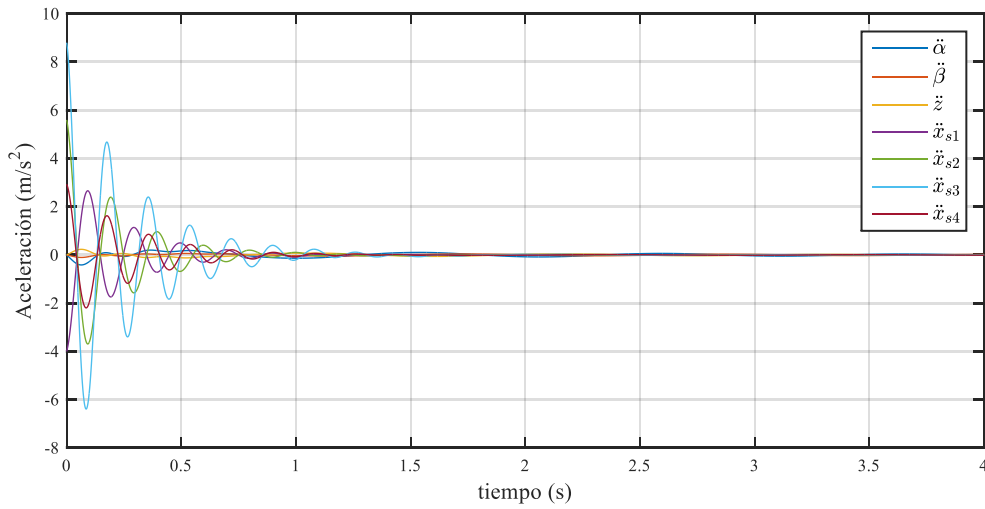


Figura 6.15. Aceleraciones Modelo Coche 7 gdl.

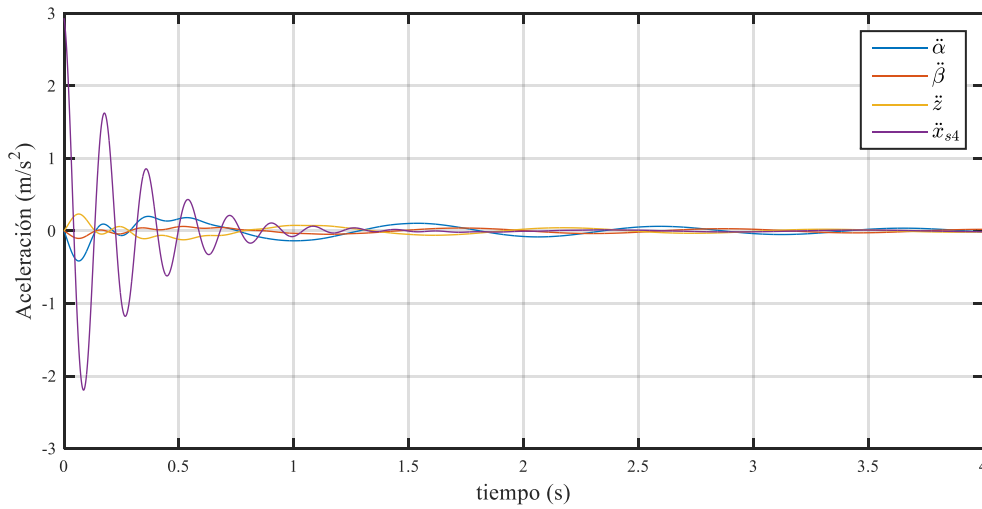


Figura 6.16. Aceleraciones Modelo Coche 7 gdl (Detalle componentes de pequeña amplitud).

6.3.2.1 Resultados teóricos

El sistema teórico de siete gdl definido anteriormente, sustituido en la ecuación (6.33) nos proporciona los siguientes resultados del problema de autovalores complejos conjugados, es decir, las frecuencias:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= -0.34289 \pm 5.4546i & \lambda_2 &= -0.48116 \pm 5.9314i & \lambda_3 &= -0.57211 \pm 6.0171i \\
 \lambda_4 &= -4.4341 \pm 31.29i & \lambda_5 &= -4.2634 \pm 31.33i & \lambda_6 &= -3.4431 \pm 34.71i \\
 \lambda_7 &= -3.5259 \pm 34.725i
 \end{aligned}$$

Que cumplen con la forma $\lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_{di}$. Por tanto, estos serían los autovalores que se quieren conseguir cuando se realice el análisis modal experimental al modelo del vehículo. Cada autovalor tiene asociado su autovector correspondiente:

Tabla 6-13. Modos Sist. 7 gdl.

Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
0	0.9549	0	0
0.6884	0	$0.3772 \pm 0.0603i$	$-0.0133 \mp 0.0129i$
$-0.5861 \mp 0.0858i$	0	0.8250	$-0.0180 \mp 0.0173i$
$0.0808 \mp 0.0035i$	$0.1484 \pm 0.0298i$	$0.2744 \pm 0.0745i$	0.7068
$0.0808 \mp 0.0035i$	$-0.1484 \mp 0.0298i$	$0.2744 \pm 0.0745i$	0.7068
$-0.2798 \mp 0.0528i$	$-0.1442 \pm 0.0201i$	$0.0765 \mp 0.0038i$	$0.0008 \mp 0.0033i$
$-0.2798 \mp 0.0528i$	$0.1442 \pm 0.0201i$	$0.0765 \mp 0.0038i$	$0.0008 \mp 0.0033i$

Modo 5	Modo 6	Modo 7
$0.0250 \pm 0.0224i$	$0.0173 + 0.0146i$	0
0	0	$0.0088 \pm 0.0065i$
0	0	$-0.0135 \mp 0.0103i$
-0.7060	$0.0088 \mp 0.0235i$	$-0.0010 \pm 0.0024i$
0.7060	$-0.0088 \pm 0.0235i$	$-0.0010 \pm 0.0024i$
$0.0064 \mp 0.0318i$	0.7065	0.7070
$-0.0064 \pm 0.0318i$	-0.7065	0.7070

Para analizar mejor la forma de estos modos se propone convertir los complejos a su forma exponencial y normalizar, quedando:

Tabla 6-14. Modos en forma exponencial Sist. 7 gdl.

Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
0	1	0	0
1	0	$0.4630 e^{0.1584i}$	$0.0263 e^{-2.3718i}$
$0.8605 e^{-2.9962i}$	0	1	$0.0353 e^{-2.3760i}$
$0.1174 e^{-0.0432i}$	$0.1585 e^{0.1981i}$	$0.3446 e^{0.2651i}$	1
$0.1174 e^{-0.0432i}$	$0.1585 e^{-2.9435i}$	$0.3446 e^{0.2651i}$	1
$0.4136 e^{-2.9552i}$	$0.1525 e^{-3.0033i}$	$0.0928 e^{-0.0502i}$	$0.0048 e^{-1.3296i}$
$0.4136 e^{-2.9552i}$	$0.1525 e^{0.1383i}$	$0.0928 e^{-0.0502i}$	$0.0048 e^{-1.3296i}$

Modo 5	Modo 6	Modo 7
0.0475	0.0320	0
0	0	$0.0154 e^{0.6391i}$
0	0.	$0.0241 e^{-2.4888i}$
$1 e^{2.4121i}$	$0.0355 e^{-1.9143i}$	$0.0037 e^{1.9752i}$
$1 e^{-0.7295i}$	$0.0355 e^{1.2273i}$	$0.0037 e^{1.9752i}$
$0.0459 e^{-2.1025i}$	$1 e^{-0.7023i}$	1
$0.0459 e^{1.0391i}$	$1 e^{2.4393i}$	1

Si se estudia la estructura de los modos, se pueden observar ciertos aspectos que caracterizan a cada uno de ellos.

- El primero de ellos corresponde a un cabeceo puro debido al desplazamiento en sentido contrario de la zona trasera frente a la delantera, en el cual las masas semisuspendidas delanteras realizan un desplazamiento de mucha mayor amplitud frente a las traseras. Además, el desplazamiento de las masas semisuspendidas acompaña al del chasis en el cabeceo.
- El segundo se identifica con un alabeo puro sin desplazamiento vertical del c.d.g. Se observa como las dos masas semisuspendidas de la parte derecha se desplazan con sentido distinto a las izquierdas, acompañando el giro del chasis.
- En tercer lugar se encuentra otro cabeceo similar al del modo 1 pero en este caso la mayor amplitud se produce en la zona trasera. Los desplazamientos se producen todos en el mismo sentido. En este caso el cabeceo se produce por esta diferencia de alturas entre la zona trasera y la delantera y no por que se desplacen en sentidos contrarios.
- El modo número cuatro corresponde al desplazamiento simultaneo de las masas semisuspendidas traseras sin apenas movimiento del resto de los gdl
- El quinto se produce de igual forma que el cuarto, pero con desplazamientos en sentido inverso de las masas semisuspendidas traseras.
- En sexto y séptimo lugar se encuentra la misma forma del quinto y cuarto modo, respectivamente, actuando ahora sobre el eje delantero.

Estos modos representados en una simulación con movimientos senoidales de cada grado de libertad [18], proporcionales a su componente del modo elegido, pueden verse habilitando la sección correspondiente dentro del programa de cálculo analítico del modelo.

6.3.2.2 Resultados en aceleración con ruido

Una vez incluida la componente aleatoria correspondiente al ruido en las aceleraciones, se puede proceder a completar el análisis modal experimental partiendo de estos datos. Como ya se ha analizado, las limitaciones del método se encuentran principalmente en el factor ruido y en la variación de los resultados en función de las condiciones iniciales (o la excitación). Para las c.i. descritas anteriormente y tras un prolongado trabajo de análisis de los barridos, se han podido obtener combinaciones de parámetros que arrojan resultados de cierta calidad. Aun así, hay que destacar que en este caso ha sido una ardua labor, puesto que, en general, los resultados no contaban con valores del MCF que aportasen confianza suficiente. Para aplicar el ITD original se toma $\Delta t = 0.05$, para el sistema duplicado: $\Delta t = 0.018$ y $\Delta \tau = 0.012$ y para el que cuenta con $3p$ estaciones: $\Delta t = 0.018$, $\Delta \tau = 0.032$ y $\Delta \tau_2 = 0.013$. Así:

Tabla 6-15. Autovalores Sist. 7 gdl en aceleración con ruido.

Teóricos	ITD	ITD con 2p estaciones	ITD con 3p estaciones
$-0.34289 \pm 5.4546i$	$-2.5594 \pm 4.7932i$	$-3.0724 \pm 4.1505i$	$-2.2721 \pm 4.444i$
$-0.48116 \pm 5.9314i$	$-4.3193 \pm 31.336i$	$-4.5011 \pm 31.344i$	$-4.3601 \pm 31.335i$
$-0.57211 \pm 6.0171i$	-34.022	$-3.6455 \pm 34.771i$	$-3.5702 \pm 34.754i$
$-4.4341 \pm 31.29i$	$-3.5549 \pm 34.753i$	-70.034	-44.986
$-4.2634 \pm 31.33i$	$-40.072 \pm 35.084i$	-92.205	$-74.431 \pm 11.101i$
$-3.4431 \pm 34.71i$	$-45.157 \pm 30.165i$	$-83.671 \pm 53.989i$	$-78.384 \pm 29.541i$
$-3.5259 \pm 34.725i$	$-19.893 \pm 62.832i$	$-94.168 \pm 34.942i$	-88.641

Como se ha comentado anteriormente, la obtención de resultados relativamente buenos ha sido una tarea de mayor complejidad en esta ocasión con respecto al sistema de 3 gdl. Aun así, y tras varios tipos de barrido para optimizar la elección de los parámetros se han podido conseguir autovalores muy próximos a los teóricos. En este sentido hay que destacar que encontrar unos autovalores adecuados no es lo que conlleva un mayor esfuerzo, sino que los modos asociados a estos tengan una cierta similitud en su forma a los analíticos. Para comenzar, se van a analizar los MCF de cada sistema. Para los autovalores destacados en negrita en la tabla anterior se han obtenido unos coeficientes de confianza:

Tabla 6-16. MCFs sist. 7 gdl, acel. con ruido.

$\lambda = -4.2634 \pm 31.33i$	$\lambda = -3.5259 \pm 34.725i$
--------------------------------	---------------------------------

ITD con 2p estaciones	ITD con 3p estaciones	ITD con 2p estaciones	ITD con 3p estaciones
$0.9849 \mp 0.0056i$	$0.9884 \mp 0.0054i$	$0.9681 \pm 0.0242i$	$0.9803 \pm 0.0171i$
$0.9816 \mp 0.0947i$	$0.9320 \mp 0.0377i$	$0.9894 \mp 0.0041i$	$0.9916 \pm 0.0027i$
$0.9621 \mp 0.0679i$	$0.9621 \pm 0.0216i$	$0.9900 \mp 0.0025i$	$0.9981 \pm 0.0069i$
$0.9981 \mp 0.0023i$	$0.9998 \mp 0.0002i$	$0.9530 \pm 0.0293i$	$0.9809 \mp 0.0104i$
$0.9986 \mp 0.0021i$	$0.9997 \mp 0.0002i$	$0.9425 \pm 0.0274i$	$0.9833 \mp 0.0176i$
$0.9534 \pm 0.0819i$	$0.9572 \mp 0.0210i$	$0.9987 \mp 0.0013i$	$0.9997 \mp 0.0003i$
$0.9917 \pm 0.0120i$	$0.9767 \pm 0.0134i$	$0.9987 \pm 0.0006i$	$0.9984 \pm 0.0001i$

Como se puede apreciar, el factor de confianza es lo suficientemente adecuado como para tener garantías de que este modo es estructural y no se debe al ruido (como ya sabíamos). Los modos calculados por el método para estos autovalores son:

Tabla 6-17. Modo 5 Sist. 7 gdl en aceleración con ruido.

$$\lambda = -4.2634 \pm 31.33i$$

Teóricos	ITD	ITD con 2p estaciones	ITD con 3p estaciones
$0.0250 \pm 0.0224i$	$0.0293 \pm 0.0189i$	$0.0277 \pm 0.0227i$	$0.0286 \pm 0.0214i$
0	$0.0015 \mp 0.0027i$	$-0.0027 \mp 0.0012i$	$-0.0021 \mp 0.0014i$
0	$-0.0063 \mp 0.0011i$	$-0.0038 \mp 0.0035i$	$-0.0049 \mp 0.0029i$
-0.7060	$-0.5844 \mp 0.0116i$	$-0.5839 \mp 0.0110i$	$-0.5843 \mp 0.0112i$
0.7060	0.8098	0.8095	0.8100
$0.0064 \mp 0.0318i$	$-0.0044 \mp 0.0141i$	$-0.0193 \pm 0.0176i$	$-0.0058 \mp 0.0101i$
$-0.0064 \pm 0.0318i$	$0.0061 \pm 0.0313i$	$0.0005 \pm 0.0404i$	$0.0036 \pm 0.0308i$

Tabla 6-18. Modo 7 Sist. 7 gdl en aceleración con ruido.

$$\lambda = -3.5259 \pm 34.725i$$

Teóricos	ITD	ITD con 2p estaciones	ITD con 3p estaciones
0	$0.0069 \pm 0.0095i$	$0.0062 \pm 0.0069i$	$0.0061 \pm 0.0084i$
$0.0088 \pm 0.0065i$	$0.0072 \pm 0.0085i$	$0.0076 \pm 0.0062i$	$0.0076 \pm 0.0063i$
$-0.0135 \mp 0.0103i$	$-0.0119 \mp 0.0113i$	$-0.0115 \mp 0.0095i$	$-0.0115 \mp 0.0100i$
$-0.0010 \pm 0.0024i$	$0.0066 \mp 0.0015i$	$0.0082 \pm 0.0178i$	$0.0064 \pm 0.0026i$
$-0.0010 \pm 0.0024i$	$-0.0058 \pm 0.0092i$	$-0.0093 \mp 0.0174i$	$-0.0062 \pm 0.0037i$
0.7070	0.9495	0.9484	0.9490
0.7070	$0.3121 \mp 0.0203i$	$0.3146 \mp 0.0212i$	$0.3138 \mp 0.0208i$

Aunque hay que reconocer que la concordancia entre los modos teóricos y los calculados dista mucho de ser la deseable, tras haber podido observar un gran número de modos calculados con otros parámetros, se puede asegurar que estos, al menos, son identificables. Como se puede apreciar en ambos, las dos componentes de mayor valor corresponden con la versión analítica, guardando además las relaciones de signos.

Aunque no se ha comentado anteriormente, el primer autovalor calculado en las tres aplicaciones del ITD también cuenta con un MCF de gran calidad, lo que nos indica que esta frecuencia también corresponde con una frecuencia natural del sistema (λ_1 o λ_2). Sin embargo, debido a que su valor no ha sido calculado con precisión por el método, al menos con el número de estaciones que se ha trabajado en este proyecto, el modo correspondiente a esta no guarda relación, a priori, con el analítico. Es por esto por lo que no se ha incluido en el análisis anterior.

Muy posiblemente, modificando las condiciones iniciales sea posible obtener el resto de frecuencias y modos pues, como ya se ha justificado, las condiciones iniciales suponen uno de los factores que mayor influencia tiene

en el cálculo con el ITD. Debido al arduo proceso que se ha tenido que seguir para obtener los valores arriba tabulados no se va a realizar la comprobación de esto. En su lugar, se propone la aplicación de un filtro de paso bajo.

6.3.2.3 Resultados en aceleración con ruido filtrados

Como se ha comentado que la calidad de los resultados y el número de frecuencias obtenidas tras la aplicación del método al modelo de 7 gdl no cumple con las expectativas, además de encontrarse muy limitadas las opciones de encontrar resultados adecuados, se ha decidido aplicar el filtro de paso bajo ya utilizado en el Apartado 5.4. a la respuesta contaminada con ruido y observar así si se produce una mejora en los resultados. La frecuencia de corte se ha situado nuevamente en 40 Hz. En cuanto al registro, el escrutinio que realiza el filtro puede apreciarse en las siguientes figuras:

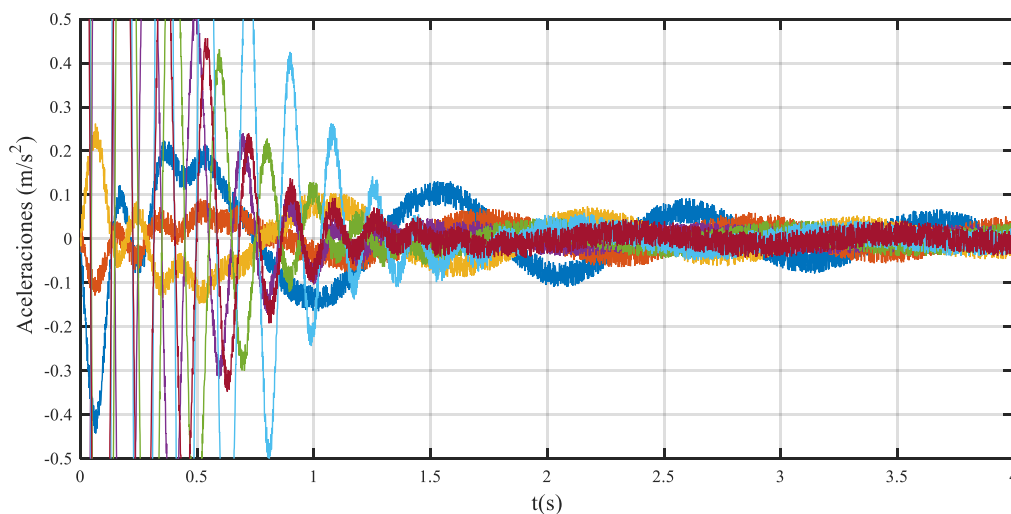


Figura 6.17. Detalle aceleraciones (m/s^2) Modelo Coche 7 gdl con ruido.

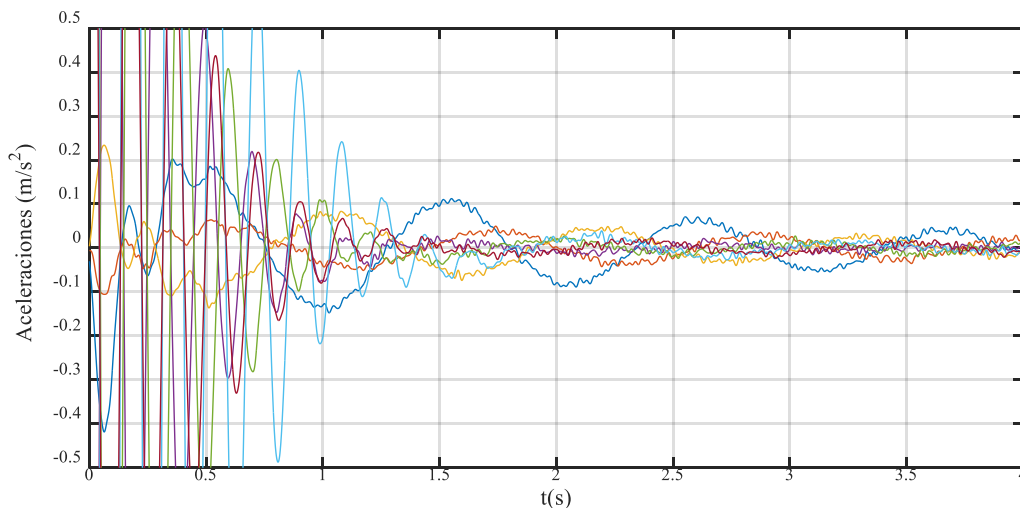


Figura 6.18. Detalle aceleraciones (m/s^2) Modelo Coche 7 gdl con ruido filtrado.

La mejoría es más que apreciable a simple vista. Aun así, esto no nos garantiza que los resultados que se obtengan al aplicar el ITD también sufran tal mejoría. Para ver esto se va a realizar un estudio en mayor detalle.

Como apoyo, se ha aprovechado el bucle realizado en el programa destinado a los barridos y se ha obtenido un nuevo término para cada iteración de este, con el cual se puede comprobar con mayor facilidad el funcionamiento del filtro. Este nuevo término es el valor mínimo contenido en el vector de valores del factor MCF para cada autovalor. Con este resultado, se puede observar la tendencia de los MCF, puesto que se buscan factores con parte real superior a 0.90, si se grafica la parte real de cada uno de estos se puede obtener un espectro de valores

que nos permite conocer qué valores de los parámetros consiguen, al menos, un buen factor de confianza. Esto no quita que en muchas ocasiones estos buenos resultados correspondan a frecuencias no complejas que causan incongruencias en el método. Para mostrar en más detalle lo que se está comentando en este párrafo se van a incluir dos de estas representaciones. La primera de ellas previa a la aplicación del filtro y la segunda una vez aplicado, ambas en el sistema con el doble de estaciones (se itera el valor de $\Delta\tau$) para un valor de $\Delta t = 0.019$.

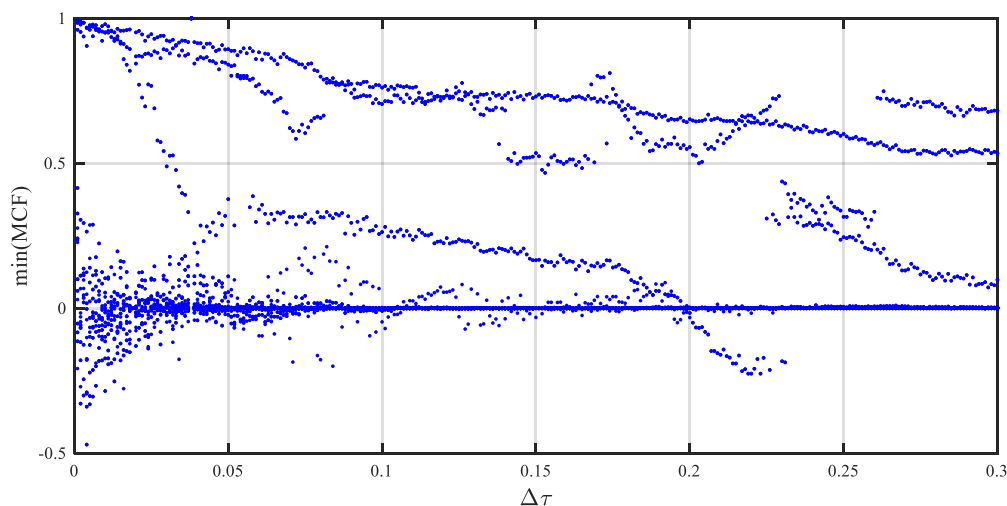


Figura 6.19. Barrido del MCF en $\Delta\tau$ sin filtrar.

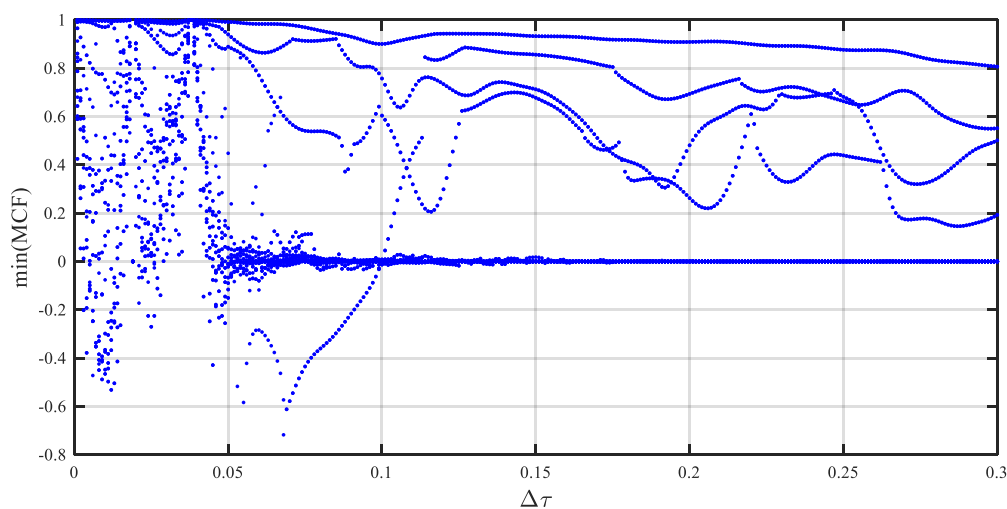


Figura 6.20. Barrido del MCF en $\Delta\tau$ filtrado.

La Figura 6.20. reafirma el correcto funcionamiento del filtro de cara a la mejora de los resultados. Además de posibilitar un mayor rango de valores de $\Delta\tau$ para los cuales se consiguen resultados fidedignos, también aumenta el número de combinaciones para otros valores de $\Delta\tau$ con resultados de calidad. Esto facilita en gran medida la elección de parámetros, uno de los mayores inconvenientes encontrados en el análisis previo a la aplicación del filtro (Apartado 6.3.2.2).

Partiendo de toda esta información comentada anteriormente, se seleccionan los nuevos parámetros del ITD. Para aplicar el original se toma $\Delta t = 0.065$, para el sistema duplicado: $\Delta t = 0.019$ y $\Delta\tau = 0.042$ y para el que cuenta con $3p$ estaciones: $\Delta t = 0.015$, $\Delta\tau = 0.035$ y $\Delta\tau_2 = 0.062$. Los resultados de interés son:

Tabla 6-19. Autovalores Sist. 7 gdl en aceleración con ruido filtrado.

Teóricos	ITD	ITD con 2p estaciones	ITD con 3p estaciones
$-0.34289 \pm 5.4546i$	$-0.83335 \pm 5.8368i$	-5.2488	$-0.84673 \pm 5.8128i$
$-0.48116 \pm 5.9314i$	$-9.9032 \pm 1.0802i$	$-1.3137 \pm 5.5015i$	-6.2794
$-0.57211 \pm 6.0171i$	-19.355	-23.896	-10.449
$-4.4341 \pm 31.29i$	$-20.6 \pm 6.8925i$	-4.2665 ± 31.331	$-4.2772 \pm 31.337i$
$-4.2634 \pm 31.33i$	$-4.2704 \pm 31.307i$	$-3.5486 \pm 34.78i$	$-3.5494 \pm 34.767i$
$-3.4431 \pm 34.71i$	$-3.5231 \pm 34.768i$	$-24.426 \pm 42.548i$	$-16.256 \pm 39.509i$
$-3.5259 \pm 34.725i$	$-13.804 \pm 37.483i$	$-45.441 \pm 52.628i$	$-39.548 \pm 31.746i$

En esta tabla se puede observar cómo, con mucho menor esfuerzo para hallar una combinación de parámetros adecuada, se han conseguido unos autovalores más próximos a los analíticos que los calculados anteriormente.

En cuanto a los autovectores:

Tabla 6-20. Modo 5 Sist. 7 gdl en aceleración con ruido filtrado.

$$\lambda = -4.2634 \pm 31.33i$$

Teóricos	ITD	ITD con 2p estaciones	ITD con 3p estaciones
$0.0250 \pm 0.0224i$	$0.0253 \pm 0.0217i$	$0.0252 \pm 0.0202i$	$0.0257 \pm 0.0215i$
0	$-0.0015 \mp 0.0042i$	$-0.0012 \mp 0.0014i$	$-0.0016 \mp 0.0026i$
0	$-0.0031 \mp 0.0020i$	$-0.0049 \mp 0.0014i$	$-0.0044 \mp 0.0014i$
-0.7060	$-0.5850 \mp 0.0146i$	$-0.5849 \mp 0.0114i$	$-0.5849 \mp 0.0123i$
0.7060	0.8092	0.8096	0.8095
$0.0064 \mp 0.0318i$	$0.0120 \mp 0.0130i$	$0.0022 \mp 0.0077i$	$-0.0001 \mp 0.0131i$
$-0.0064 \pm 0.0318i$	$0.0096 \pm 0.0352i$	$0.0066 \pm 0.0337i$	$0.0062 \pm 0.0341i$

Tabla 6-21. Modo 7 Sist. 7 gdl en aceleración con ruido.

$$\lambda = -3.5259 \pm 34.725i$$

Teóricos	ITD	ITD con 2p estaciones	ITD con 3p estaciones
0	$0.0070 \pm 0.0075i$	$0.0074 \pm 0.0080i$	$-0.0068 \mp 0.0077i$
$0.0088 \pm 0.0065i$	$0.0087 \pm 0.0071i$	$0.0074 \pm 0.0066i$	$-0.0079 \mp 0.0068i$
$-0.0135 \mp 0.0103i$	$-0.0125 \mp 0.0098i$	$-0.0122 \mp 0.0107i$	$0.0124 \pm 0.0105i$
$-0.0010 \pm 0.0024i$	$0.0035 \mp 0.0042i$	$0.0040 \mp 0.0059i$	$-0.0051 \pm 0.0061i$
$-0.0010 \pm 0.0024i$	$0.0006 \pm 0.0125i$	$-0.0021 \pm 0.0148i$	$0.0031 \mp 0.0151i$
0.7070	0.9501	0.9494	-0.9498
0.7070	$0.3102 \mp 0.0216i$	$0.3121 \mp 0.0209i$	$-0.3108 \pm 0.0211i$

En cuanto a los autovectores se debe remarcar que no existe una gran diferencia con respecto a los calculados anteriormente. Viendo además la poca variación existente conforme se incrementa el tamaño del sistema, se podría decir que estos son los mejores autovectores que pueden calcularse con el ITD para esta combinación de datos, independientemente del número de estaciones virtuales adosadas al registro original. Vuelve a producirse también en esta ocasión lo que se comentaba acerca del primer autovalor analítico (MCF alto, pero resultados no aproximados).

Con intención de verificar el correcto funcionamiento del método, de encontrar al menos una vez cada una de las frecuencias teóricas, de mejorar los resultados anteriores y aprovechando las ventajas encontradas a la aplicación del filtro a nuestro registro, se procede a modificar las c.i. y analizar las respuestas obtenidas como se ha hecho hasta el momento en este apartado. Por concreción, únicamente se incluirá la información esencial y de mayor calidad conseguida con estos ensayos. Tras aproximadamente medio centenar de combinaciones de parámetros:

Tabla 6-22. Resultados finales sist. 7 gdl.

Frecuencias (rad/s)				
	$-0.4935 \pm 5.5570i$	$-0.4890 \pm 5.9309i$	$-0.5958 \pm 6.0804i$	$-4.4648 \pm 31.290i$
Modos	$-0.0940 \mp 0.0478i$	0.9552	$-0.0024i$	$-0.0014 \pm 0.0008i$
	$-0.5375 \pm 0.1925i$	$-0.0083 \mp 0.0097i$	$0.3932 \mp 0.2059i$	$-0.0153 \mp 0.0130i$
	0.7109	$0.0009 \mp 0.0051i$	0.7837	$-0.0166 \mp 0.0169i$
	$-0.0373 \pm 0.0357i$	$0.1468 \pm 0.0336i$	$0.2930 \mp 0.0102i$	$0.7064 \pm 0.0022i$
	$-0.0107 \pm 0.06865i$	$-0.1484 \mp 0.0280i$	$0.3016 \mp 0.0163i$	0.7071
	$0.2837 \mp 0.005203i$	$-0.1468 \mp 0.0268i$	$0.0576 \pm 0.0523i$	$-0.0031 \mp 0.0011i$
	$0.2623 \mp 0.027962i$	$0.1383 \pm 0.0241i$	$0.0502 \pm 0.0554i$	$-0.0017 \mp 0.0026i$

Frecuencias (rad/s)			
Modos	$-4.2755 \pm 31.3286i$	$-3.4413 \pm 34.753i$	$-3.5177 \pm 34.755i$
	$0.0201 \pm 0.0196i$	$0.0163 \pm 0.0136i$	$0.0025 \pm 0.0015i$
	$0.0032 \mp 0.0010i$	$-0.0015 \mp 0.0005i$	$0.0091 \pm 0.0065i$
	$-0.0014 \mp 0.0031i$	$-0.0017 \pm 0.0009i$	$-0.0138 \mp 0.0102i$
	$-0.7044 \pm 0.0026i$	$0.0046 \mp 0.0196i$	$0.0005 \mp 0.0005i$
	0.7048	$-0.0038 \pm 0.0242i$	$-0.0046 \pm 0.0012i$
	$-0.0198 \mp 0.0527i$	$0.7054 \pm 0.0006i$	0.7910
	$0.0198 \pm 0.0521i$	-0.7077	$0.6115 \mp 0.0005i$

Si se comparan estos autovectores con los analíticos (Tabla 6-13) se puede ver que la aproximación es considerablemente buena, corroborando el correcto funcionamiento del método.

Es necesario comentar que se han necesitado hasta cuatro c.i. distintas para la obtención de las siete frecuencias con sus autovectores. Además, para unas mismas c.i., la ejecución del programa que resuelve las ecuaciones de movimiento del modelo implica que el factor ruido que se incluye se vea modificado por su carácter aleatorio. Se ha podido comprobar cómo, aunque se estuviese aplicando el filtro paso bajo, los resultados variaban de unos registros a otros y era necesario encontrar una nueva combinación de parámetros para conseguir unos resultados similares a los obtenidos previamente con esas mismas c.i.

Otro aspecto reseñable es la gran calidad de los resultados generados tras la aplicación del ITD en su versión original, sin estaciones ficticias, siendo apenas apreciable en muchos casos la mejora con respecto a las soluciones duplicando y triplicando los registros. Sin embargo, puesto que el MCF únicamente puede obtenerse cuando, al menos, el número de estaciones se ha duplicado, es necesario realizar este cálculo para diferenciar entre las frecuencias estructurales y las relacionadas con el ruido.

Como conclusión de este apartado, ha quedado demostrada la efectividad del método cuando la información introducida no incluye ruido o cuando este ha sido filtrado debidamente. No se debe olvidar que todo este análisis se ha realizado con las aceleraciones tomadas en las posiciones de cada grado de libertad. Puede darse el caso de que los registros de nuestros ensayos reales, con los acelerómetros colocados en las posiciones que nos permitía la propia estructura del monoplaça, conlleve otro factor que dificulte la obtención de los resultados.

6.4 Aplicación del método a los datos del ensayo

Una vez comprobado el funcionamiento del ITD, así como sus limitaciones, es el momento de aplicar el análisis modal experimental al conjunto de datos registrados por los acelerómetros profesionales. Sabiendo que nuestros ensayos únicamente se realizaron con excitación de la rueda trasera derecha y tras las conclusiones obtenidas de los apartados anteriores, es muy predecible que no se consiga la totalidad de frecuencias y modos de la estructura del monoplaça. Independientemente a esto, se mostrarán todas las combinaciones obtenidas, quedando como incógnita la existencia, o no, de otras posibilidades.

Es muy importante recordar la Tabla 5-1 en la que se hizo una primera estimación de las posibles frecuencias naturales (amortiguadas) de nuestro vehículo mediante las FRF. La concordancia con esta tabla corroboraría los resultados obtenidos. Sobre esto es necesario hacer mención al cambio de unidades existente entre los valores de la tabla, en Hz, y los resultados del ITD, en rad/s por lo que será necesario hacer el cambio. Finalmente, sabiendo que es la parte imaginaria de los autovalores ($\lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_{di}$) la que corresponde con la frecuencia natural amortiguada, esta será la que se compare con la información de la tabla.

A modo ilustrativo se incluyen unas figuras que representan la información captada por nuestros acelerómetros y algunos de los barridos obtenidos de la aplicación del ITD para que se comprenda mejor la dificultad que conlleva la obtención de unos resultados adecuados. Esto es un mero ejemplo dentro de las decenas de combinaciones que ha sido necesario ejecutar hasta conseguir una base de resultados lo suficientemente amplia como para seleccionar algunos como concluyentes.

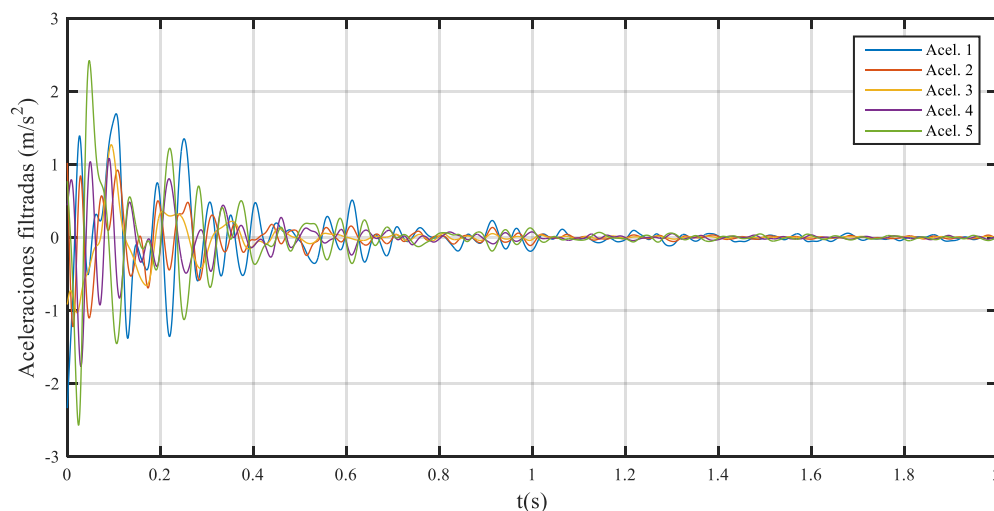


Figura 6.21. Aceleraciones del ART-17 filtradas con $A=3$ mm.

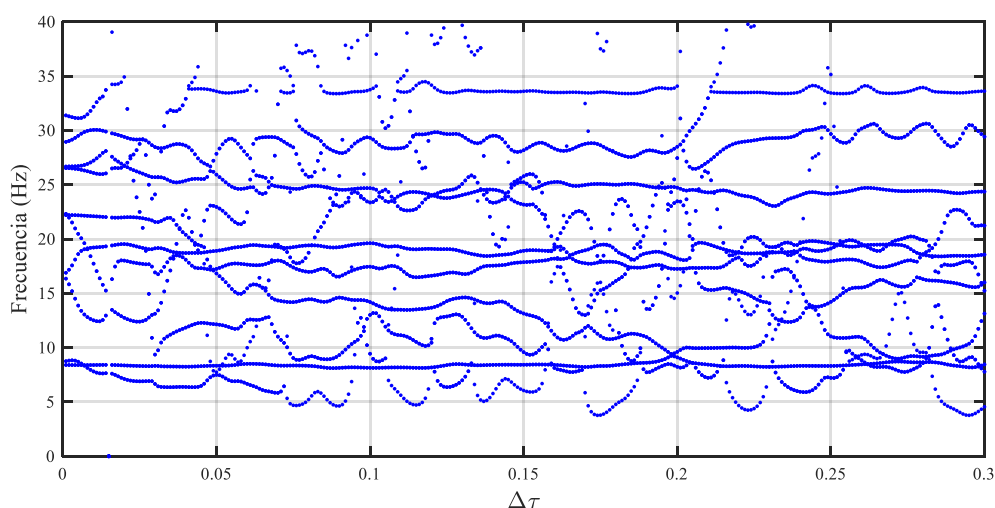


Figura 6.22. Barrido de frecuencias para $\Delta\tau$

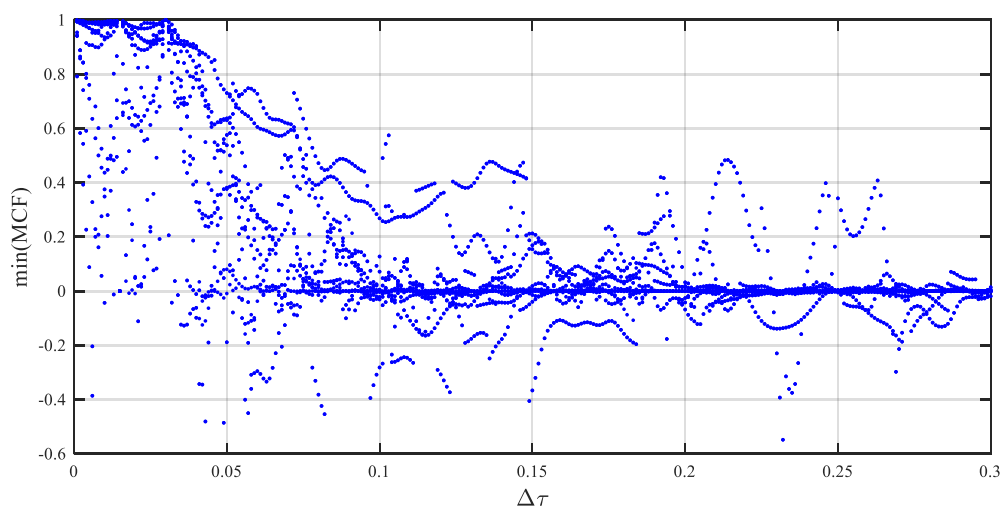


Figura 6.23. Barrido del MCF en $\Delta\tau$

Tras el escrutinio realizado a toda la información obtenida, las frecuencias y modos representativos de nuestro monoplaza son:

Tabla 6-23. Resultados finales ART-17.

Autovalores				
$\lambda =$	$-12.1796 \pm 40.8078i$	$-4.7981 \pm 51.8190i$	$-10.882 \pm 82.309i$	$-6.823 \pm 105.48i$
$\omega_d =$	6.4947 Hz	8.2472 Hz	13.0999 Hz	16.7876 Hz
Modos	0.8240	$0.3936 \pm 0.1017i$	$-0.6242 \pm 0.0392i$	$0.5002 \pm 0.0272i$
	$0.2394 \mp 0.0086i$	$-0.1068 \pm 0.0883i$	$-0.2326 \pm 0.0543i$	$0.4250 \mp 0.0716i$
	$0.2085 \pm 0.1037i$	-0.5825	$-0.0417 \pm 0.0074i$	$0.0297 \mp 0.0285i$
	$-0.1966 \pm 0.1141i$	$-0.5500 \mp 0.0923i$	$0.2562 \mp 0.0727i$	$-0.4888 \mp 0.0114i$
	$-0.1842 \pm 0.3518i$	$-0.3567 \mp 0.1948i$	0.6922	-0.5680

Autovalores		
$\lambda =$	$-4.0782 \pm 120.58i$	$-13.98 \pm 133.73i$
$\omega_d =$	19.1909 Hz	21.2838 Hz
Modos	0.7658	$-0.5914 \mp 0.0348i$
	$0.2399 \mp 0.1255i$	$-0.2477 \pm 0.0565i$
	$0.1148 \mp 0.0528i$	$0.0569 \pm 0.0143i$
	$-0.1844 \pm 0.0478i$	$0.4745 \mp 0.0050i$
	$-0.5333 \pm 0.0594i$	0.5966

Se ha podido observar que los resultados provenientes de los ensayos de amplitud 1 y 2 mm tienden, en general, a tener menos concordancia entre ellos que los proporcionados por el de amplitud 3 mm. Este hecho es algo que se considera esperable puesto que un desplazamiento de ± 1 mm en la base de una de las ruedas puede no ser suficiente para excitar el vehículo de la manera apropiada.

Para poder ver con mayor claridad la forma de los modos se propone su paso a forma exponencial de manera que se podrá observar mejor la amplitud y el ángulo de desfase.

Tabla 6-24. Resultados finales ART-17 en forma exponencial.

Frecuencias (Hz)				
$\omega_d =$	6.4947	8.2472	13.0999	16.7876
Modos	1	0.6978	0.9036	0.8819
	$0.2907 e^{-0.0359i}$	$0.2379 e^{2.1982i}$	$0.3450 e^{-0.1666i}$	$0.7588 e^{-0.2213i}$

	$0.2826 e^{0.4615i}$	$1 e^{2.8888i}$	$0.0612 e^{-0.1130i}$	$0.0724 e^{-0.8185i}$
	$0.2759 e^{2.6157i}$	$0.9574 e^{3.0551i}$	$0.3848 e^{2.9280i}$	$0.8607 e^{3.1105i}$
	$0.4819 e^{2.0531i}$	$0.6976 e^{-2.8944i}$	$1 e^{-3.0789i}$	$1 e^{3.0873i}$

Frecuencias (Hz)		
$\omega_d =$	19.1909	21.2838
Modos	1	0.9930
	$0.3535 e^{-0.4818i}$	$0.4260 e^{-0.2831i}$
	$0.1650 e^{-0.4313i}$	$0.0983 e^{-2.9544i}$
	$0.2487 e^{2.8879i}$	$0.7955 e^{3.0723i}$
	$0.7007 e^{3.0308i}$	$1 e^{3.0829i}$

6.4.1 Análisis de resultados

Si se analizan las frecuencias y modos obtenidos se puede realizar varios comentarios: En primer lugar se confirma que las frecuencias naturales amortiguadas conseguidas con el análisis modal experimental coinciden con las estimaciones provenientes de las FRF. Esto refuerza la veracidad de los resultados. Además, si se observan las fases de cada modo (exceptuando la segunda columna) tiene cierta tendencia a desfazar valores cercanos a π de las dos primeras componentes (ruedas del lado derecho) con respecto a las dos últimas (ruedas del lado izquierdo), lo que podría identificarse con un movimiento de alabeo. En cuanto a los modos 4 y 6 se aprecia que tienen una forma similar, lo que podría indicarnos que se refiere a un mismo modo siendo captado en un rango de frecuencias relativamente alto.

Los casos con una amplitud de menor orden en la tercera componente del modo (acelerómetro del bastidor) junto con el desfase arriba comentado pueden estar indicando que se está produciendo un alabeo prácticamente puro y que apenas desplaza verticalmente el eje longitudinal del vehículo. De igual forma se podría interpretar como un movimiento alternativo de las masas semisuspendidas de cada eje sin apenas movimiento del chasis.

7 CONCLUSIONES

En este capítulo se exponen las conclusiones procedentes del apartado anterior, así como una serie de consejos que pueden implementarse de cara a futuros ensayos de la misma índole que los aquí realizados con la intención de conseguir unos resultados de mayor calidad.

7.1 Conclusiones

Del estudio llevado a cabo en el apartado anterior se puede concluir que el ITD es un método eficaz para la obtención de los parámetros modales que caracterizan una estructura. Sin embargo, no todo es favorable a la hora de utilizar el método. El tipo de ensayos realizados, así como la calidad de los mismos es algo fundamental para la obtención de unos resultados veraces y consistentes.

Posiblemente sean las condiciones iniciales del ensayo el punto más crítico para el método, puesto que, como se ha demostrado, una única combinación de estas no es suficiente para alcanzar el total de las frecuencias y modos. Así también, un mayor número de ensayos nos permitiría comparar los resultados obtenidos en cada uno de ellos para cerciorarnos de que se estaban tomando los resultados más adecuados. En el Apartado 6.3.2.3 se comprobó que se pueden conseguir resultados considerablemente leales al modelo analítico cuando se cuenta con una variedad lo suficientemente abundante de ensayos.

Otro aspecto destacable es la necesidad de filtrado de los registros. Ha sido esencial la aplicación del filtro de paso bajo para que este proyecto consiga unos resultados adecuados, reduciendo las limitaciones que se encontraban inicialmente para la elección de los parámetros del ITD.

Aunque no se han podido conseguir los objetivos iniciales fijados para este trabajo y han tenido que ser modificados conforme avanzaba el desarrollo de este, esto nos ha permitido descubrir algunos aspectos acerca del ITD que desconocíamos hasta el momento como puede ser la gran influencia de las condiciones iniciales. Por tanto, se considera que el estudio realizado en el presente es de gran utilidad para futuros proyectos de análisis modal experimental, así como para próximos usos de los acelerómetros de bajo coste.

Para no alargar en exceso este documento se obvia incluir los programas creados para el cálculo numérico.

8 REFERENCIAS

- [1] Brüel & Kjaer, «An introduction to modal testing,» [En línea]. Available: <http://www.bksv.com/doc/bo0172>.
- [2] M. Rodríguez Súnico, Análisis modal operacional: Teoría y Práctica, Escuela Superior de Ingenieros: Universidad de Sevilla, 2005.
- [3] ARUS Andalucía Racing Team. [En línea]. Available: <http://arusteam.com/>.
- [4] MTS Systems Corporation, «Web oficial,» [En línea]. Available: www.mts.com.
- [5] P. Urda Gómez, Comunicación personal, Predoctoral, Dep. Ingeniería Mecánica, ETSI, Universidad de Sevilla, Abril 2018.
- [6] A. Limited, «Arm Mbed,» [En línea]. Available: <https://www.mbed.com/en/>.
- [7] A. Collín Morales, Estudio del funcionamiento de los metodos ITD y LSCEM para estimación de parámetros dinámicos y aplicación a una viga en voladizo, Universidad de Sevilla: Escuela Técnica Superior de Ingeniería, 2017.
- [8] Z.-F. Fu y J. He, Modal Analysis, Oxford: Butterworth-Heinemann, 2001.
- [9] D. García Vallejo y J. Domínguez Abascal, Dinámica de Sólidos, Apuntes del Máster en Diseño Avanzado en Ingeniería Mecánica, Escuela Técnica Superior de Ingeniería: Universidad de Sevilla, 2018.
- [10] G. Kerschen y J.-C. Golinval, «Experimental Modal Analysis,» Structural Dynamics Research Group, University of Liege, [En línea]. Available: <http://www.ltas-vis.ulg.ac.be/cmsms/>.
- [11] V. Meruane, Dinámica Estructural, Apuntes para el curso ME706, Universidad de Chile, 2017.
- [12] S. R. Ibrahim y R. S. Pappa, «Large Modal Survey Testing Using the Ibrahim Time Domain Identification Technique,» *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 19, nº 5, pp. 459-465, 1982.
- [13] R. D. Nayeri, F. Tasbihgoo, M. Wahbeh, J. P. Caffrey, S. F. Masri, J. P. Conte y A. Elgamal, «Study of Time-Domain Techniques for Modal Parameter Identification of a Long Suspension Bridge with Dense Sensor Arrays,» *ASCE Journal of engineering mechanics*, vol. 135, nº 7, pp. 669-683, 2009.
- [14] S. R. Ibrahim, «Modal Confidence Factor in Vibration Testing,» *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 15, nº 5, pp. 313-316, 1978.
- [15] J. Domínguez Abascal y E. Reina Romo, Introducción a los Sistemas de N Grados de Libertad, Apuntes de la asignatura ACDM, Escuela Técnica Superior de Ingeniería: Universidad de Sevilla, 2017.

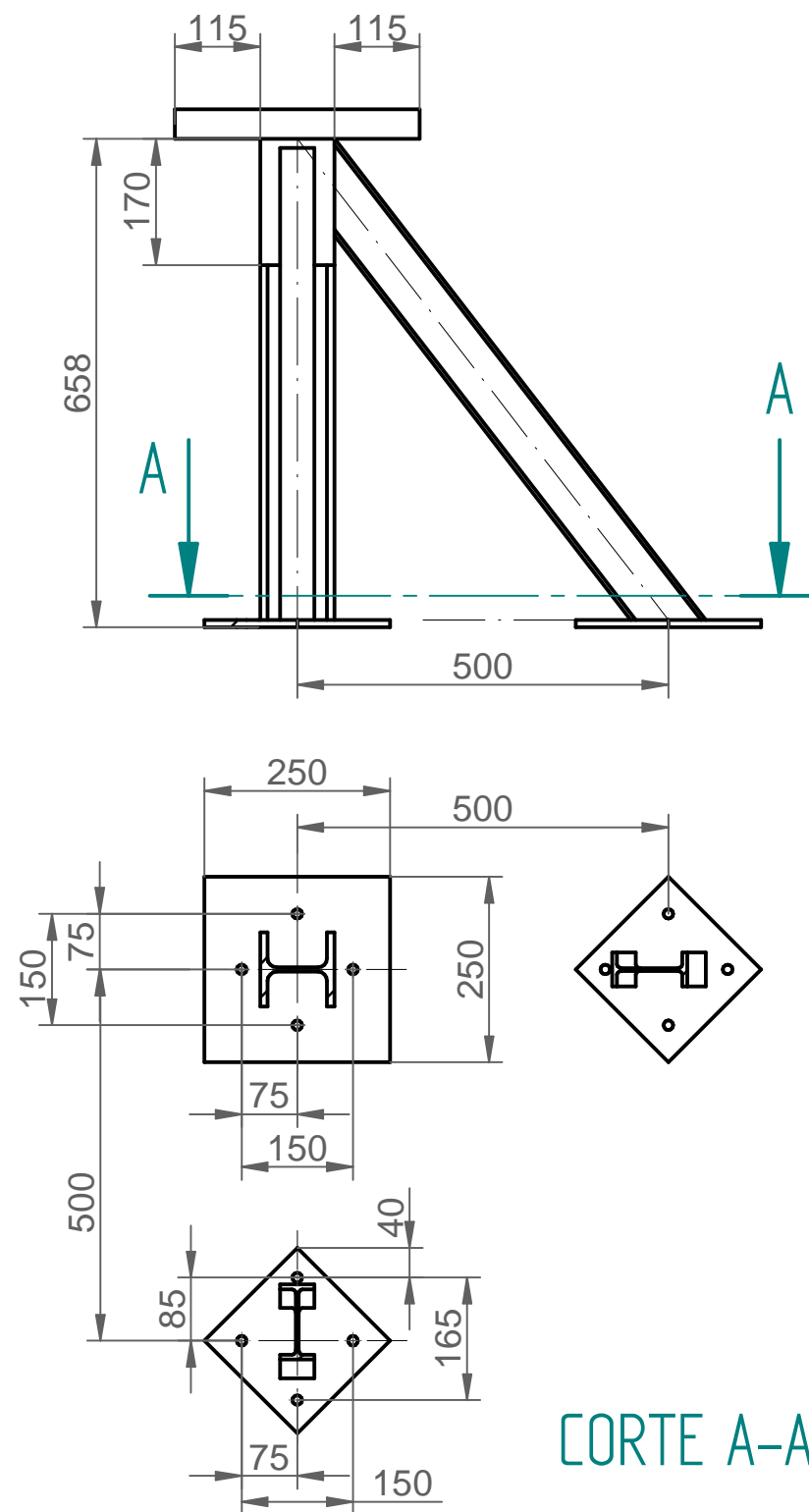
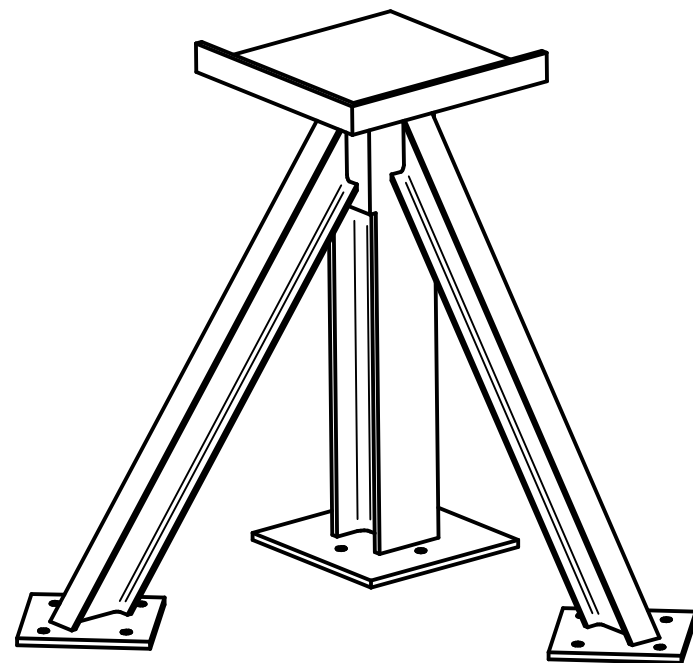
-
- [16] J. Wideberg, «Modelo de Medio Coche,» de *Apuntes de la asignatura Automóviles*, Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Universidad de Sevilla, 2018.
- [17] K. Popp y W. Schiehlen, *Ground Vehicle Dynamics*, Berlín: Springer, 2010.
- [18] J. L. Escalona Franco, *Material de Prácticas, asignatura Cinemática y Dinámica de Máquinas*, Escuela Técnica Superior de Ingeniería: Universidad de Sevilla, 2017.

9 ANEXO

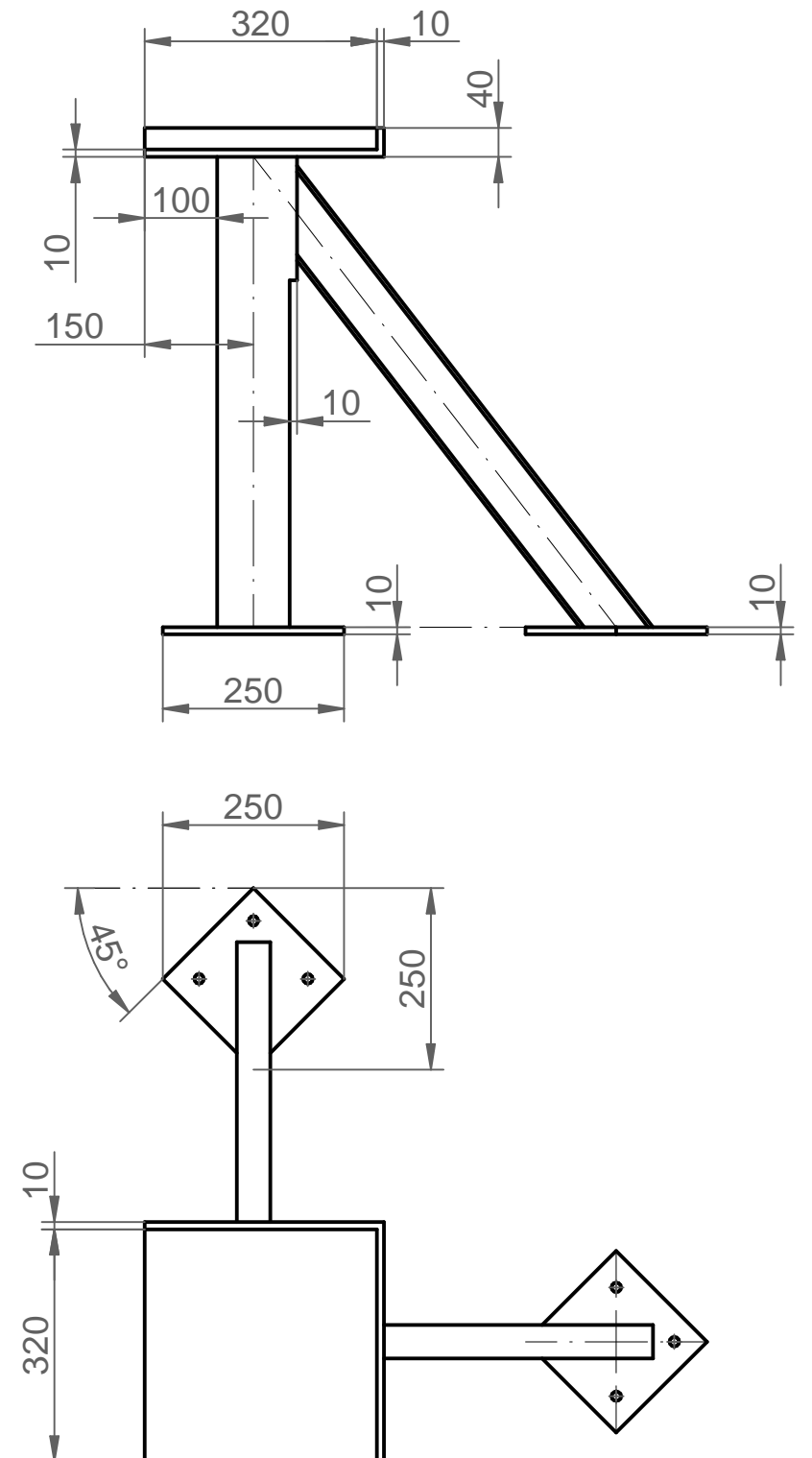
9.1 Planos

9.1.1 Apoyo

9.1.2 Base del Actuador

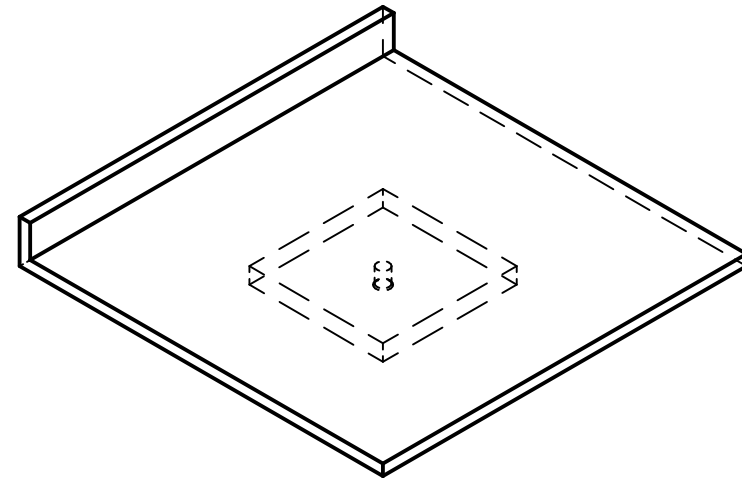
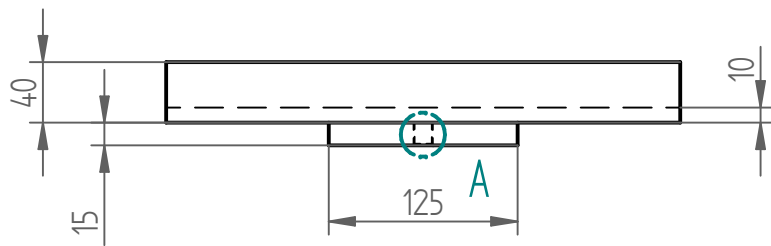


CORTE A-A



- Todos los agujeros tienen diámetro de 13 mm y son pasantes.
- Las dos bases laterales tienen idénticas características
- Todas las uniones soldadas

	Nombre	Fecha	ETS de Ingeniería		
Dibujado	Rafael Prieto	28/11/17	Universidad de Sevilla		
Comprobado			Título Apoyo para ensayo de vehículo de competición		
Aprobado I					
Aprobado 2					
Salvo indicación contraria cotas en milímetros y ángulos en grados			A3	Plano	1
			Archivo: PlanoApoyo.dft		
			Escala 1:10		



- | | | | | | |
|---|---------------|----------|--|-------|---|
| | Nombre | Fecha | <h1 style="text-align: center;">ETS de Ingeniería</h1> <h2 style="text-align: center;">Universidad de Sevilla</h2> | | |
| Dibujado | Rafael Prieto | 28/11/17 | | | |
| Comprobado | | | <h3 style="text-align: center;">Título</h3> <h2 style="text-align: center;">Base para actuador</h2> | | |
| Aprobado I | | | | | |
| Aprobado 2 | | | | | |
| <p>Salvo indicación contraria
cotas en milímetros
y ángulos en grados</p> | | | A4 | Plano | 2 |
| | | | Archivo: PlanoBaseActuador.dft | | |
| | | | Escala 1:5 | | |